ÁLGEBRA LINEAL, RESUMEN Y EJEMPLOS

Héctor Manuel Mora Escobar

hectormora@yahoo.com
www.hectormora.info

July 2, 2015

ÍNDICE GENERAL

Notación

$\mathcal{P}_n$ es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n.

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}, \forall j\}$.

$\mathbb{R}^{m\times n}$ = conjunto de matrices reales de tamaño $m \times n$. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, entonces

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} es la entrada ("elemento" o componente) de A en la fila i y en la columna j.

$\mathbb{R}^{n\times 1}$ = conjunto de matrices columna de n componentes.

$\mathbb{R}^{1\times n}$ = conjunto de matrices fila de n componentes.

$\mathbb{R}^{1\times 1} = \mathbb{R}$.

A^{T} = la transpuesta de la matriz A.

$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$, es decir,

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$$

$A_{i\star} = A(i,:) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \end{bmatrix}$, fila i-ésima de la matriz A.

$A_{\star j} = A(:,j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$, columna j-ésima de la matriz A.

$\mathrm{nf}\,(A)$ = número de filas de la matriz A.

$\mathrm{nc}\,(A)$ = número de columnas de la matriz A.

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

$\|x\|_2 = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\big)^{1/2}$

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$

A_{ij}, dependiendo del contexto, denota dos cosas diferentes:

- A_{ij}, en la expresión de una matriz por bloques, es la matriz o bloque que está en la i-ésima fila de bloques y en la j-ésima columna de bloques.
- A_{ij} es la submatriz de A obtenida al quitar de A la fila i y la columna j.

$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, \forall i\}$, el ortante no negativo de $\mathbb{R}^n$.

e^j = j-ésima columna de la matriz identidad.

C_A espacio columna de A, o espacio generado por las columnas de A.

F_A espacio fila de A, o espacio generado por las filas de A.

$\mathcal{B}_c$ es la base canónica de un espacio vectorial (cuando a una base se le ha dado ese nombre). Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$, la base canónica es $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|_{\mathbb{C}} : \lambda_i \text{ es valor propio de } A\}$, radio espectral de A.

$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, parte entera o parte entera inferior o piso de x.

$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$, parte entera superior o techo de x.

$\text{espec}(A)$ = espectro de A = conjunto de valores propios de A.

sssi = si y solamente si

En la escritura de números decimales, las cifras enteras están separadas de las decimales por medio de un punto, en lugar de una coma como es la convención del español. No se utiliza el punto para separar las unidades de mil de las centenas. Por ejemplo, en este documento se escribe 12345.67 en lugar de $12.345, 67$.

1

Matrices

1.1 Definiciones iniciales

Una **matriz real** A de tamaño $m \times n$ es un arreglo o tabla de números reales, organizados en m filas (lineas horizontales) y n columnas (líneas verticales). Cada fila tiene exactamente n números, y cada columna tiene m números. Estos números se llaman **entradas** de la matriz. Algunas veces también se habla de los elementos de la matriz, pero no en el sentido de pertenecia a un conjunto.

El conjunto de todas la matrices reales $m \times n$ se denotará por $\mathbb{R}^{m\times n}$. También es usual denotarlo por $\mathcal{M}_{m\times n}$ o por $\mathcal{M}(m, n)$.

La entrada de la matriz A en la fila i y en columna j se denotará por a_{ij}.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ejemplo 1.1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & \\ 2/3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ no es una matriz.}$$

Ejemplo 1.2.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3.2 & \pi \\ 2/3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \qquad a_{23} = 6, \qquad a_{12} = -3.2.$$

Una **matriz fila** es una matriz de una sola fila. Una **matriz columna** es una matriz de una sola columna. El conjunto $\mathbb{R}^{1\times 1}$ es lo mismo que $\mathbb{R}$.

Usualmente se utilizan la letras mayúsculas A, B, C, ..., para denotar las matrices. También es frecuente denotar las matrices columna o las matrices fila por letras minúsculas y las entradas con un subíndice únicamente.

$$g = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}.$$

Dos matrices A y B del mismo tamaño son iguales si y solamente si todas sus entradas son iguales,

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \text{para todo } i \quad \text{y para todo } j\,.$$

$\mathbb{C}^{m\times n}$ es el comjunto de matrices complejas (entradas complejas) de m filas y n columnas. Mientras no se diga lo contrario, todas las matrices son matrices reales.

Una **matriz cuadrada** tiene tantas filas como columnas. Para las matrices cuadradas, mientras no se diga lo contrario, n indicará el número de filas (y de columnas).

Ejemplo 1.3.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3.2 & \pi \\ 2/3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{es cuadrada.}$$

En una matriz cuadrada las **entradas diagonales** son a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}.

La **matriz nula** o **matriz cero** es la matriz cuyas entradas son todas nulas. Se denotará por $\mathbf{0}_{m\times n}$, y si no hay ambigüedad por $\mathbf{0}$ o simplemente por 0 (puede haber ambigüedad entre la matriz 0 y el número 0).

$$\mathbf{0}_{3\times 2} = \mathbf{0} = 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La fila i de una matriz se denotará por $A_{i\star}$ o por $A(i,:)$, notación de Scilab y de Matlab. Análogamente, la columna j se denotará por $A_{\star j}$ o por $A(:,j)$.

$$A_{i\star} = A(i,:) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n},$$

$$A_{\star j} = A(:,j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se usará la siguiente notación para subfilas, subcolumnas y submatrices:

$$A(i, j:k) = \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{ik} \end{bmatrix}$$

$$A(i:p, j) = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{i+1,j} \\ \vdots \\ a_{p-1,j} \\ a_{pj} \end{bmatrix}$$

$$A(i:p, j:k) = \begin{bmatrix} a_{ij} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,k-1} & a_{ik} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k} \\ \vdots & & & & \\ a_{p-1,j} & a_{p-1,j+1} & \cdots & a_{p-1,k-1} & a_{p-1,k} \\ a_{pj} & a_{p,j+1} & \cdots & a_{p,k-1} & a_{pk} \end{bmatrix}$$

$$A(i:p, :) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{i,n-1} & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n-1} & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & \\ a_{p-1,1} & a_{p-1,2} & \cdots & a_{p-1,n-1} & a_{p-1,n} \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{p,n-1} & a_{pn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A_{2\star} = A(2,:) = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 5},$$

$$A_{\star 3} = A(:,3) = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

$$A(3, 2:4) = \begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$A(2:3, :) = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

1.1.1 En Scilab

En Scilab o en Matlab, la matriz del ejemplo anterior se puede definir por

```
A = [ -1 -3.2 10; 2/3 5 6]

t = A(2,3)

f = A(2,:)

c = A(:,3)

F = zeros(3,4)

[p, q] = size(A)

u = size(A,1)

v = size(A,2)
```

1.2 Suma y multiplicación por escalar

Definición 1.1. Sean A y B dos matrices $m \times n$ y k un número real. Se define la **suma de matrices** y la **multiplicación de una matriz por escalar** así:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$kA = Ak = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

De manera compacta se puede decir: si $C = A + B$, entonces $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo i, j; si $D = kA$, entonces $d_{ij} = ka_{ij}$ para todo i, j.

Ejemplo 1.5.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$
$$-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 3 & 6 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 & 2 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Sean A, B, C matrices cualesquiera del mismo tamaño, α y β números reales. La suma y la multiplicación por escalar tienen las siguientes propiedades:

$$A + B = B + A \qquad \text{conmutatividad} \tag{1.3a}$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{asociatividad} \tag{1.3b}$$
$$A + \mathbf{0} = A \tag{1.3c}$$
$$\text{existe } \tilde{A} \text{ tal que } A + \tilde{A} = \mathbf{0} \tag{1.3d}$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) \qquad \text{asociatividad} \tag{1.4a}$$
$$1A = A \tag{1.4b}$$
$$0A = \mathbf{0} \tag{1.4c}$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A \qquad \text{distributividad} \tag{1.5a}$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B \qquad \text{distributividad} \tag{1.5b}$$

Dada una matriz A, la matriz $\tilde{A}$, tal que $A + \tilde{A} = \mathbf{0}$, se llama el inverso aditivo de A y se denota por $-A$. Se cumple

$$-A = (-1)A. \tag{1.6}$$

Ejemplo 1.6. El inverso aditivo de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ \pi & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -\pi & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

De esta manera se puede introducir, como en los números reales, la **resta**, **sustracción** o **diferencia** entre matrices:

$$A - B := A + (-B)$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

su **transpuesta**, denotada A^{T} (a veces A' o A^t), es una matriz $n \times m$,

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.7.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

En Scilab la transpuesta se obtiene mediante `A'`

Propiedades:

$$(A + B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \tag{1.7}$$
$$(\alpha A)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} \tag{1.8}$$
$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A \tag{1.9}$$

1.3 Ecuaciones matriciales

Ejemplo 1.8. Encontrar X tal que $3\left(A + \frac{1}{3}B + \frac{4}{3}X\right) = -X - A + 6B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
3\left(A+\frac{1}{3}B+\frac{4}{3}X\right) &= -X-A+6B\\
3A+B+4X &= -X-A+6B\\
5X &= -4A+5B\\
X &= -\frac{4}{5}A+B\\
X &= \begin{bmatrix} -3/5 & -12/5 & -21/5\\ -2 & -34/5 & -8/5\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

1.4 Matrices escalonadas reducidas

Definición 1.2. La primera entrada no nula de cada fila no nula se llama **pivote**. Obviamente las filas nulas no tienen pivote.

Definición 1.3. Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es **escalonada reducida** (por filas) si cumple las siguientes propiedades:

1. Si tiene filas nulas, éstas están al final (abajo).
2. En las filas no nulas el pivote es 1.
3. En las filas no nulas el número de ceros antes del pivote va aumentando.
4. El pivote es la única entrada no nula de su columna.

Ejemplo 1.9. Son matrices escalonadas reducidas:

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&-3&0&4\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.10. No son matrices escalonadas reducidas:

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&-3&2&4\\0&0&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&1&-3&0&4\\0&1&0&1&-5\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

En una matriz escalonada reducida, las columnas correspondientes a los pivotes se llaman **columnas básicas** o **dependientes**. Las otras columnas se llaman **columnas libres**, **independientes** o **no básicas**.

1.5 Operaciones elementales

Hay tres operaciones elementales (con las filas):

1. Intercambiar dos filas. Se denota por

$$F_i' \leftarrow F_k\,, \quad F_k' \leftarrow F_i\,,$$

o simplemente $F_i \leftrightarrow F_k$

2. Multiplicar una fila por una constante c no nula. Se denota por

$$\begin{aligned} & F_i' \leftarrow cF_i\,, \\ \text{o} \quad & F_i \leftarrow cF_i\,, \\ \text{o simplemente} \quad & cF_i\,. \end{aligned}$$

3. A una fila, sumar un múltiplo de otra fila. Se denota por

$$\begin{aligned} & F_k' \leftarrow F_k + cF_i\,, \\ \text{o} \quad & F_k \leftarrow F_k + cF_i\,, \\ \text{o simplemente} \quad & F_k + cF_i\,. \end{aligned}$$

Definición 1.4. Si a partir de A, por medio de una o varias operaciones elementales se obtiene B, se dice que A y B son **matrices equivalentes por filas**.

Ejemplo 1.11.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 20 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$F_3 - 1F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{2}F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ F_3 - 1F_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Todas las matrices anteriores son equivalentes por filas.

Ejemplo 1.12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 20 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \end{bmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \\ 2 & 4 & 8 & 10 & 20 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad F_2 - 2F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}F_2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} F_1 - 3F_2 \\ F_3 - 2F_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En estos dos ejemplo se empezó con la misma matriz y por medio de operaciones elementales se llegó a la misma matriz escalonada reducida. En cada ejemplo el proceso fue diferente.

Teorema 1.1. *Toda matriz A es equivalente por filas a una matriz escalonada reducida. Esta matriz es única. Se denotará*

$$E_A$$

En Scilab se puede obtener por medio de (*reduced row echelon form*)

```
rref(a)
```

Dos resultados inmediatos:

$$E_{E_A} = E_A \tag{1.10}$$

$$E_A = A \quad \text{si y solamente si } A \text{ es escalonada reducida.} \tag{1.11}$$

Dos matrices diferentes del mismo tamaño pueden ser equivalentes por filas a la misma matriz escalonada reducida.

El **rango** de una matriz es el número de filas no nulas de su matriz escalonada reducida. Para la matriz del último ejemplo

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{rango}(A) = 2.$$

En Scilab se puede obtener por medio de

```
rank(A)
```

Ejemplo 1.13.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_A = E_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.6 Algoritmo de Gauss-Jordan

Por medio de este algoritmo se obtiene la matriz escalonada reducida a partir de la matriz inicial. A continuación hay dos maneras diferentes de presentarlo pero es exactamente el mismo proceso. la presentación de la segunda versión es más estructurada.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. En el algoritmo, (i, j) indica la posición donde se busca obtener el pivote.

1.6.1 Versión 1

1. $i \leftarrow 1$, $j \leftarrow 1$
2. Si $i > m$ o $j > n$, entonces parar, la matriz resultante es escalonada reducida.
3. Si $A(i : m, j) = 0$, entonces $j \leftarrow j + 1$ e ir al paso 2.
4. Si es necesario, hacer intercambio de filas, entre la fila i y una fila inferior, para que en la matriz resultante $a_{ij} \neq 0$.
5. Obtener pivote de valor 1 mediante $F_i' \leftarrow \dfrac{1}{a_{ij}} F_i$.
6. Por medio de operaciones $F_k' \leftarrow F_k - a_{kj} F_i$ obtener ceros por encima y por debajo de pivote.
7. $i \leftarrow i + 1$, $j \leftarrow j + 1$. Ir al paso 2.

1.6.2 Versión 2

$i \leftarrow 1, \quad j \leftarrow 1$
mientras $i \leq m$ y $j \leq n$
  si $A(i:m, j) \neq 0$
    si $a_{ij} = 0$
      buscar $p > i$ tal que $a_{pj} \neq 0$
      $F_i \leftrightarrow F_p$
    fin-si
    $F_i' \leftarrow \dfrac{1}{a_{ij}} F_i$
    para $k = 1, ..., m,\ k \neq i$
      $F_k' \leftarrow F_k - a_{kj} F_i$
    fin-para
    $i \leftarrow i + 1, \quad j \leftarrow j + 1$
  sino
    $j \leftarrow j + 1$
  fin-si
fin-mientras

Ejemplo 1.14. Aplicación del algoritmo de Gauss-Gordan:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -24 & -20 & 7 \end{bmatrix}$$

$i \leftarrow 1,\ j \leftarrow 1$

$j \leftarrow 2$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & -24 & -20 & 7 \end{bmatrix}$$

$\dfrac{1}{2}F_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 8 & -24 & -20 & 7 \end{bmatrix}$$

$F_3 - 8F_1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -25 \end{bmatrix}$$

$i \leftarrow 2, \quad j \leftarrow 3$

$j \leftarrow 4$

$\dfrac{1}{4}F_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -25 \end{bmatrix}$$

$F_3 + 20F_2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$i \leftarrow 3, \quad j \leftarrow 5$

$j \leftarrow 6$

1.6.3 Matriz escalonada reducida parcial

Algunas veces es útil realizar el proceso de obtención de una matriz escalonada reducida hasta las primeras n_0 columnas, con $1 \leq n_0 \leq n$. Esto quiere decir que a partir de A se aplica el algoritmo de Gauss-Jordan hasta que en la matriz resultante (llamada por facilidad también A) se tenga que $A(:, 1 : n_0)$ es escalonada reducida.

Esta matriz escalonada reducida parcial no es única. Dependiendo de la manera de escoger p puede variar el resultado. De todas maneras la matriz obtenida es equivalente por filas a la matriz inicial.

Ejemplo 1.15. Obtener una matriz escalonada reducida de A hasta la columna 2,

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Después de procesar la primera columna, sin intercambio de filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Después de procesar la segunda columna,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es escalonada reducida hasta la segunda columna. El proceso se puede realizar, a partir de la misma matriz inicial, de otra manera. Primero intercambio de filas 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Al finalizar el proceso de la primera columna:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas 2 y 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Después de procesar la segunda columna,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es escalonada reducida hasta la segunda columna y diferente de la que se obtuvo en la primera parte del ejemplo.

1.7 Producto de matrices

1.7.1 Caso más secillo

Sea $A \in \mathbb{R}^{1\times n}$ (una matriz fila con n entradas) y $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (una matriz columna con n entradas). El producto de estas dos matrices es un número:

$$A\,B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}\,.$$

Ejemplo 1.16.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix} = 2 \times 5 \;+\; (-3) \times 6 \;+\; 4 \times (-7) = -36.$$

1.7.2 Caso general

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (dos matrices no necesariamente del mismo tamaño, pero el número de columnas de la primera debe ser igual al número de filas de la segunda). El producto $A\,B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ se define usando el producto entre filas de la primera matriz y columnas de la segunda:

$$C = A\,B = \begin{bmatrix} A_{1\star}B_{\star 1} & A_{1\star}B_{\star 2} & \cdots & A_{1\star}B_{\star p} \\ A_{2\star}B_{\star 1} & A_{2\star}B_{\star 2} & \cdots & A_{2\star}B_{\star p} \\ \vdots & & & \\ A_{m\star}B_{\star 1} & A_{m\star}B_{\star 2} & \cdots & A_{m\star}B_{\star p} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\,, \quad i = 1, ..., m,\; j = 1, ..., p$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo 1.17.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \\ 8 & -2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = \begin{bmatrix} -20 & 13 & -20 & 5 \\ 40 & -6 & 58 & 12 \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = 4 \times 2 \;+\; 0 \times 6 \;+\; 5 \times 10 = 58\,.$$

El producto por filas o por columnas. Sean $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $f \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (matrices compatibles para el producto) y

$$C = AB$$

$$g = Af$$

Entonces:

$$A_{i\star}B = (AB)_{i\star} = C_{i\star} \tag{1.12}$$

$$A_{i\star}f = (Af)_i = g_i \tag{1.13}$$

$$AB_{\star j} = (AB)_{\star j} = C_{\star j} \tag{1.14}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{1\star}B \\ A_{2\star}B \\ \vdots \\ A_{m\star}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_{\star 1} & AB_{\star 2} & \cdots & AB_{\star p} \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

En palabras, el producto de una fila de A y la matriz B es una fila de C. El producto de la matriz A y una columna de B es una columna de C.

Ejemplo 1.18.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 69 & 41 & 33 & 6 \end{bmatrix} = (AB)_{2\star}$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $g \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

$$Ag = \begin{bmatrix} a_{11}g_1 + a_{12}g_2 + \cdots + a_{1n}g_n \\ a_{21}g_1 + a_{22}g_2 + \cdots + a_{2n}g_n \\ \vdots \\ a_{m1}g_1 + a_{m2}g_2 + \cdots + a_{mn}g_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1} \tag{1.16}$$

$$Ag = g_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + g_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + g_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

$$Ag = g_1 A_{\star 1} + g_2 A_{\star 2} + \cdots + g_n A_{\star n} + \tag{1.18}$$

Esta última expresión dice que el producto Ag es la suma de las columnas de A multiplicadas, cada una, por un escalar. Esto se conoce como **combinación lineal** [1] de las columnas de A.

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \tag{1.19}$$

La **matriz identidad** $I = I_n$ es una matriz cuadrada tal que las entradas diagonales valen 1 y las otras son nulas.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En Scilab se puede obtener mediante `eye(3,3)` .

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, B, C, D, F, G, H matrices de tamaños tales que las operaciones siguientes estén bien definidas. El producto y la suma cumplen las siguientes propiedades:

$$I_m A = A \tag{1.20}$$

$$A I_n = A \tag{1.21}$$

$$A I_n = I_n A = A\,, \quad \text{si } A \text{ es cuadrada} \tag{1.22}$$

$$A\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{1.23}$$

$$\mathbf{0}A = \mathbf{0} \tag{1.24}$$

$$A(BC) = (AB)C \quad \text{y se escribe simplemente} \quad ABC \tag{1.25}$$

$$A(D+F) = AD + AF \tag{1.26}$$

$$(G+H)A = GA + HA \tag{1.27}$$

[1] Este concepto se verá con más detalle más adelante.

Solamente para matrices cuadradas están definidos al mismo tiempo los productos AB y BA y, en general, no coinciden, es decir, el producto de matrices cuadradadas no es conmutativo.

Ejemplo 1.19.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 7 & 22 \\ 13 & 36 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 34 & 43 \end{bmatrix}.$$

Dos matrices cuadradas del mismo tamaño A y B **conmutan** si $AB = BA$. Claramente hay casos inmediatos, por ejemplo A y $\mathbf{0}$. También A e I o A y A.

Ejemplo 1.20. Las matrices siguientes conmutan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} = BA$$

De manera semejante a los números reales se puede definir la potencia de una matriz cuadrada:

$$A^2 = A\,A \tag{1.28}$$
$$A^3 = A\,A\,A \tag{1.29}$$
$$A^{n+1} = A^n\,A \tag{1.30}$$
$$A^1 = A \tag{1.31}$$
$$A^0 = I \tag{1.32}$$

Por el momento A^n tiene sentido para potencias enteras no negativas. Más adelante se verá que para algunas matrices tiene sentido A^{-2}.

1.8 Inversa de una matriz

En los números reales, todo $x \neq 0$ tiene inverso multiplicativo. ¿Qué pasa con las matrices cuadradas? ¿Para cuales matrices existe B tal que $A\,B = I$?

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Si existe B tal que $A\,B = I$ se dice que B es la **matriz inversa** de A o simplemente la **inversa** de A. Esta matriz, cuando existe, se denota por

$$A^{-1}$$

Se dice entonces que A es **invertible**. Primeros resultados inmediatos:

$$I^{-1} = I \tag{1.33}$$
$$(cI)^{-1} = \frac{1}{c}\,I \quad \text{si } c \neq 0. \tag{1.34}$$

Obviamente la matriz cuadrada nula no tiene inversa. A continuación ejemplos de una matriz invertible y dos no invertibles.

Ejemplo 1.21.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

Más adelante hay dos métodos para obtener la inversa. El segundo requiere el uso de determinantes.

Ejemplo 1.22. Encontrar, si posible, la inversa de la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente se ve una inconsistencia en la posición $(2,2)$. Para que las dos matrices sean iguales, $0 = 1$. Luego A, que no es la matriz nula, no tiene inversa.

Ejemplo 1.23. Encontrar, si posible la inversa de la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$a + 2c = 1$$
$$b + 2d = 0$$
$$2a + 4c = 0$$
$$2b + 4d = 1$$

De nuevo hay inconsistencia, por ejemplo, $a + 2c = 1 \quad \text{y} \quad 2a + 4c = 0$. Es decir $2(a + 2c) = 0$. Luego A no tiene inversa.

En Scilab, cuando la matriz tiene inversa, ésta se puede obtener por medio de `inv(A)`.

1.9 Obtención de la inversa

El procedimiento es muy sencillo. Se construye una matriz $n \times (2n)$. En la mitad izquierda se coloca A, en la mitad derecha se coloca I. Se busca su matriz escalonada reducida. Si en la mitad izquierda del resultado quedó I, entonces lo que quedó a la derecha es la inversa. Si en la mitad izquierda no está la identidad, entonces A no tiene inversa.

Ejemplo 1.24.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.25.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

A no es invertible.

Ejemplo 1.26.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A no es invertible.

Ejemplo 1.27.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 11/3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & -4/3 & 1 \\ -2/3 & 11/3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2. *Sea A un matriz cuadrada. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- *A es invertible.*
- *$rango(A) = n$*
- *$E_A = I$.*

Si A es invertible se puede definir A^{-2}, A^{-3}, ...

$$A^{-2} = \left(A^{-1}\right)^2 \tag{1.35}$$

$$A^{-3} = \left(A^{-1}\right)^3 \tag{1.36}$$

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n \tag{1.37}$$

Para valores enteros de p y q (para enteros negativos se requiere que A sea invertible)

$$A^p A^q = A^{p+q} . \tag{1.38}$$

Por ejemplo

$$A^5 A^{-2} = A^3 , \qquad A^5 A^{-9} = A^{-4} .$$

1.10 Matriz de una operación elemental

Las operaciones elementales se pueden representar por medio del producto a la izquierda por una matriz. Veámoslo con ejemplos.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 & 14 \\ 20 & 25 & 26 & 27 \\ 32 & 34 & 35 & 33 \\ 44 & 40 & 48 & 42 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 & 14 \\ 44 & 40 & 48 & 42 \\ 32 & 34 & 35 & 33 \\ 20 & 25 & 26 & 27 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 & 14 \\ 20 & 25 & 26 & 27 \\ 8 & 17/2 & 35/4 & 33/4 \\ 44 & 40 & 48 & 42 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DA = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 & 14 \\ 20 & 25 & 26 & 27 \\ 32 & 34 & 35 & 33 \\ 43 & 38.8 & 46.7 & 40.6 \end{bmatrix}$$

Es claro que el resultado BA es el mismo de la operación $F_2 \leftrightarrow F_4$ sobre A. El resultado CA es el mismo de la operación $\dfrac{1}{4}F_3$. El resultado DA es el mismo de la operación $F_4 - 0.1F_1$.

¿Cómo se obtiene la matriz que representa una operación elemental? Muy sencillo. **Se aplica la operación elemental a la matriz I.** La matriz obtenida se llama **matriz elemental**.

1.10.1 Inversas de la matrices elementales

La inversa de una matriz elemental, se puede obtener directamente a partir de la matriz elemental, o también, se puede obtener como la matriz de la operación inversa:

$$(M(\text{oper. elem.}))^{-1} = M(\text{inversa(oper. elem.)}) \tag{1.39}$$

Es necesario saber entonces cual es la inversa de una operación elemental. La inversa de la operación es simplemente la operación que permite llegar al estado antes de aplicar la operación.

$$A \xrightarrow{\text{oper. elem.}} A' \xrightarrow{\text{inversa(oper. elem.)}} A$$

Entonces:

Operación	inversa
$F_i \leftrightarrow F_j$	$F_i \leftrightarrow F_j$
cF_i	$\frac{1}{c}F_i$
$F_k + cF_i$	$F_k - cF_i$

Ejemplo 1.28. En $\mathbb{R}^{4\times 4}$,

$$B = M(F_2 \leftrightarrow F_4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = M(\text{inversa}(F_2 \leftrightarrow F_4)) = M(F_2 \leftrightarrow F_4)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.29. En $\mathbb{R}^{4\times 4}$,

$$C = M(\frac{1}{4}F_3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = M(\text{inversa}(\frac{1}{4}F_3)) = M(4F_3)$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.30. En $\mathbb{R}^{4\times 4}$,

$$
\begin{aligned}
D &= M(F_4 - 0.1F_1) \\
D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
D^{-1} &= M(\text{inversa}(F_4 - 0.1F_1)) = M(F_4 + 0.1F_1) \\
D^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Sean A y B dos matrices cuadradas invertibles, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Entonces AB es invertible sssi A y B son invertibles y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,. \tag{1.40}$$

Si A es invertible y $c \neq 0$,

$$(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1} \tag{1.41}$$

$$(A^{\mathrm{T}})^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.42}$$

1.11 Ecuaciones matriciales

Sean A y B matrices cuadradas del mismoo tamaño y A invertible. Encontrar X tal que

$$3XA + 5A - 6B = 0.$$

$$
\begin{aligned}
3XA + 5A - 6B &= 0 \\
3XA &= -5A + 6B \\
3XAA^{-1} &= (-5A + 6B)A^{-1} \\
3X &= -5I + 6BA^{-1} \\
X &= -\frac{5}{3}I + 2BA^{-1}
\end{aligned}
$$

1.12 Algunas matrices especiales

Una matriz cuadrada es **diagonal** si sus entradas no diagonales son nulas, es decir,

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\,.$$

Ejemplo 1.31.

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad
\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}
$$

La suma de dos matrices diagonales es una matriz diagonal. El producto de un escalar y una matriz diagonal es una matriz diagonal. El producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

El proceso de obtención de la inversa indica que *una matriz diagonal es invertible sssi todas sus entradas diagonales son no nulas y*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

Una matriz cuadrada es **triangular superior** si todas sus entradas por debajo de la diagonal son nulas, es decir,

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j\,.$$

Ejemplo 1.32. En particular toda matriz diagonal, también es triangular superior. Las siguientes matrices son triangulares superiores:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

La suma de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior. El producto de un escalar y una matriz triangular superior es una matriz triangular superior. El producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

Una matriz triangular superior es invertible sssi todas sus entradas diagonales son no nulas.

De manera análoga se define matriz triangular inferior, $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

Matriz simétrica $A = A^{\mathrm{T}}$.

Matriz antisimétrica $A = -A^{\mathrm{T}}$.

Los elementos diagonales de una matriz antisimétrica son nulos.

Si A es cuadrada

$$A + A^{\mathrm{T}} \quad \text{es simétrica} \tag{1.44}$$

$$A - A^{\mathrm{T}} \quad \text{es antisimétrica} \tag{1.45}$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(A - A^{\mathrm{T}}) \quad \text{suma de simétrica y antisimétrica.} \tag{1.46}$$

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$AA^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{m\times m} \quad \text{es simétrica} \tag{1.47}$$

$$A^{\mathrm{T}}A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{es simétrica} \tag{1.48}$$

$$
\begin{aligned}
(kA)^{\mathrm{T}} &= kA^{\mathrm{T}} \\
(A+B)^{\mathrm{T}} &= A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}} \\
(AB)^{\mathrm{T}} &= B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \\
\mathrm{tr}(I_n) &= n \\
\mathrm{tr}(A+B) &= \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \\
\mathrm{tr}(kA) &= k\mathrm{tr}(A) \\
\mathrm{tr}(AB) &= \mathrm{tr}(BA) \\
\text{En general } \mathrm{tr}(AB) &\neq \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)
\end{aligned}
$$

✓ Una matriz cuadrada es **idempotente** si $A^2 = A$.

✓ Una matriz cuadrada es **nilpotente** de índice k si existe un entero no negativo k tal que $A^k = 0$.

✓ Una matriz cuadrada es **ortogonal** si $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, es decir, $AA^{\mathrm{T}} = I$.

✓ Una matriz cuadrada es **singular** si no es invertible.

✓ Una matriz cuadrada es **regular** si es invertible.

✓ Una matriz cuadrada es **escalar** si existe un real t tal que $A = tI$.

✓ Una matriz cuadrada es **involutiva** si $A^2 = I$, es decir, $A^{-1} = A$.

Ejemplo 1.33. Matrices idempotentes:

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}
$$

Matrices nilpotentes: $A = 0$ es una matriz nilpotente de orden 1.

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 33 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 70 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

A es matriz nilpotente de índice 4.

Matrices ortogonales:

$$
\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad I_n - \frac{2}{v^{\mathrm{T}}v} vv^{\mathrm{T}}, \text{ con } v \in \mathbb{R}^{n\times 1}, v \neq 0.
$$

Matrices escalares:

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4.2 & 0 & 0 \\ 0 & -4.2 & 0 \\ 0 & 0 & -4.2 \end{bmatrix}
$$

Matriz involutiva:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

⋆ Si A nilpotente, entonces $\det(A) = 0$.

⋆ Si A idempotente, entonces $\det(A)$ es 1 o 0.

⋆ Si A ortogonal, entonces $\det(A)$ es 1 o -1.

⋆ Si A involutiva, entonces $\det(A)$ es 1 o -1.

1.13 Matrices por bloques

✓ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ está descompuesta propiamente por bloques, o simplemente, A es una **matriz por bloques**, si A se puede representar adecuadamente

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q} \\ \vdots & & & \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq} \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

donde, a su vez, A_{ij} es una matriz. Hay p filas de bloques y q columnas de bloques. Las matrices de cada fila de bloques deben tener igual número de filas y las matrices de cada columna de bloques deben tener igual número de columnas. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \operatorname{nf}(A_{11}) &= \operatorname{nf}(A_{12}) \\ \operatorname{nc}(A_{13}) &= \operatorname{nc}(A_{23}) \end{aligned}$$

Las matrices por bloques pueden ser muy útiles para calcular productos, inversas, determinantes (capítulo 3), en matrices grandes con algunos o muchos bloques nulos.

Se puede definir de manera natural la suma y producto de matrices por bloques. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & A_{13}+B_{13} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & A_{23}+B_{23} \end{bmatrix}$$

Obviamente se requiere que los bloques o submatrices sean del mismo tamaño,

$$\text{tamaño}(A_{ij}) = \text{tamaño}(B_{ij})\,.$$

Un ejemplo para el producto:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21} & A_{31}B_{12}+A_{32}B_{22} \end{bmatrix}$$

Los productos entre los bloques deben estar bien definidos, por ejemplo,

$$\operatorname{nc}(A_{12}) = \operatorname{nf}(B_{22})\,.$$

Para matrices cuadradas, con frecuencia es útil que se pueda expresar como una matriz cuadrada por bloques, que los bloques diagonales sean cuadrados y que ciertos bloques sean nulos.

Ejemplo 1.34.

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 23 & 25 & 27 & 29 \\ 41 & 43 & 45 & 47 & 49 \\ 0 & 0 & 55 & 57 & 59 \\ 0 & 0 & 65 & 67 & 69 \\ 0 & 0 & 85 & 87 & 89 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 41 & 43 & 45 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 27 & 29 \\ 47 & 49 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 85 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 57 & 59 \\ 67 & 69 \\ 87 & 89 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 23 & 25 \\ 41 & 43 & 45 \\ 0 & 0 & 55 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 27 & 29 \\ 47 & 49 \\ 57 & 59 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 65 \\ 0 & 0 & 85 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 67 & 69 \\ 87 & 89 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 21 & 23 \\ 41 & 43 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 25 & 27 & 29 \\ 45 & 47 & 49 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 55 & 57 & 59 \\ 65 & 67 & 69 \\ 85 & 87 & 89 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Las tres descomposiciones por bloques son correctas, pero puede ser más útil la última. En esta, A es una matriz triangular superior por bloques.

⋆ Una matriz triangular por bloques es invertible si y solamente si sus bloques diagonales son invertibles. Para el caso de dos filas y dos columnas de bloques

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

Para el caso de una matriz diagonal por bloques

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & & 0 \\ 0 & A_{22} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_{pp} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 & & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_{pp}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

Ejemplo 1.35. Hallar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Esta es una matriz triangular superior por bloques:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$
$$A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} -32 & 29 & -7 \\ 55 & -50 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -32 & 29 & -7 \\ -5 & 2 & 55 & -50 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1.36. Hallar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

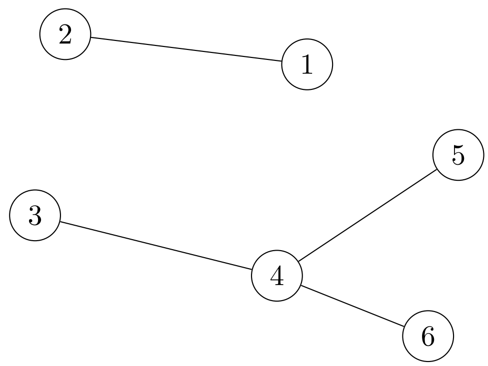
Esta matriz es diagonal por bloques,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$
$$A_{33} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}$$

1.14 Grafos y matrices

Un **grafo no dirigido** es simplemente un conjunto finito no vacío de puntos, llamados **vértices** o **nodos**, y un conjunto de **aristas** que unen algunos pares de nodos.



Un sistema vial se puede representar por un grafo. Los nodos son las ciudades. Las aristas son las carreteras.

Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que si hay n vértices, estos son justamente 1, 2, ..., n.

De manera formal un grafo no dirigido G está formado por un conjunto de vértices $V = \{1, 2, ..., n\}$ y por un conjunto E de aristas, es decir, de parejas no ordenadas de elementos de V. Así, $G = (V, E)$, donde

$$
\begin{aligned}
&V = \{1, 2, ..., n\}, \\
&E = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, ..., \{i_m, j_m\}\} \text{ con } i_k, j_k \in V,\ i_k \neq j_k \text{ para todo } k.
\end{aligned}
$$

El número de aristas es m. En algunas definiciones se permite que haya aristas de un vértice a si mismo, por ejemplo $\{3, 3\}$.

Para el grafo del dibujo anterior, $G = (V, E)$, con

$$
\begin{aligned}
V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\
E &= \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}\}\,.
\end{aligned}
$$

La **matriz de adyacencia** de un grafo no dirigido es una matriz de tamaño $n \times n$ que indica entre cuales vértices hay arista. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de adyacencia, entonces

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in E, \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin E. \end{cases} \tag{1.52}
$$

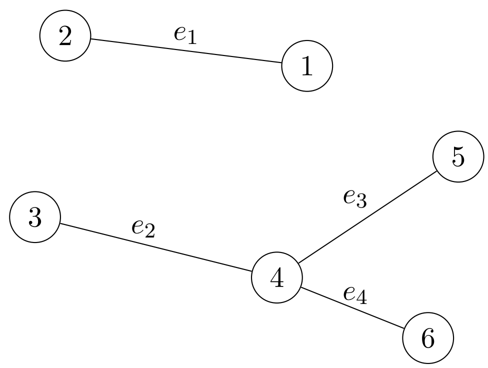
La matriz de adyacencia es simétrica y sus entradas diagonales son nulas. Para el grafo anterior,

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

En algunos casos es necesario dar un orden a las aristas. Supongamos que las aristas son

$$\begin{aligned} e_1 &= \{i_1, j_1\} \\ e_2 &= \{i_2, j_2\} \\ &\vdots \\ e_m &= \{i_m, j_m\} \end{aligned}$$

El orden de las aristas puede ser cualquiera, en particular, puede ser el lexicográfico.



La **matriz de incidencia** de un grafo es un matriz $n \times m$, una fila por cada vértice, una columna por cada arista. Si $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ es la matriz de incidencia,

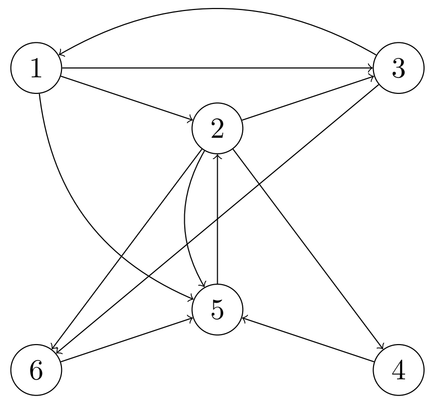
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in e_j, \\ 0 & \text{si } i \notin e_j. \end{cases}$$

En cada fila, correspondiente a un vértice, el número de unos indica el numero de aristas que inciden en el vértice. En cada columna hay dos unos.

Para el ejemplo,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Unn **grafo dirigido** o **digrafo** está compuesto por un conjunto finito no vacío de **vértices** o **nodos** y un conjunto de **arcos** o **flechas** que van de un vértice a otro vértice. De nuevo se puede suponer que si hay n vértices, estos son $\{1, 2, ..., n\}$.



Una flecha de i a j se puede representar por la pareja ordenada (i, j). Un grafo dirigido G es un pareja de vértices y flechas, $G = (V, F)$, con

$$\begin{aligned} &V = \{1, 2, ..., n\},\ n \geq 1,\\ &F \subseteq V \times V. \end{aligned}$$

Para el ejemplo,

$$\begin{aligned} &V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\\ &F = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 6), (4, 5), (5, 2), (6, 5)\}. \end{aligned}$$

Un sistema de distribución de agua se puede representar por un grafo (en este caso no debe haber dos vértices con flechas en ambos sentidos).

También un grafo puede representar un sistema donde los vértices corresponden a los actores del sistema y la flechas indican que hay influencia directa entre un actor y otro.

La **matriz de adyacencia** de un grafo dirigido es una matriz $n \times n$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in F,\\ 0 & \text{si } (i, j) \notin F. \end{cases} \tag{1.53}$$

Para el ejemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz A^2 tiene una interpretación interesante,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(A^2)_{15} = 1$ indica que hay un camino de longitud 2 (2 flechas) desde 1 hasta 5. Este camino es $(1, 2), (2, 5)$. $(A^2)_{16} = 2$ indica que hay dos caminos de longitud 2 desde 1 hasta 6. Estos caminos son $(1, 2), (2, 6)$ y $(1, 3), (3, 6)$.

De manera análoga A^3 indica los caminos de longitud 3.

Si el grafo representa las influencias directas entre actores, A^2, A^3... representan las influencias indirectas entre actores.

2

Sistemas de ecuaciones lineales

2.1 Sistemas 2×2

El siguiente es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 21 \\ 4x_1 + 2x_2 &= 14 \end{aligned}$$

Se puede resolver por varios métodos: sustitución, igualación, eliminación, determinantes, gráfico. Su única solución es $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

El sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 6 \\ -4x_1 - 8x_2 &= -12 \end{aligned}$$

tiene muchas soluciones (un número infinto de soluciones), por ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \quad x_2 = 1 \\ x_1 &= 3, \quad x_2 = 0 \\ x_1 &= 203, \quad x_2 = -100 \end{aligned}$$

El sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 6 \\ -4x_1 - 8x_2 &= -10 \end{aligned}$$

no tiene solución, es **inconsistente**.

En resumen, para un sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, hay tres casos:

- Hay una única solución.
- Hay un número infinito de soluciones.
- No hay solución.

Esto se puede deducir teniendo en cuenta que cada ecuación representa una recta del plano. Hay tres casos:

1) Las dos rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte corresponden a la solución.

2) Las dos ecuaciones representan la misma recta, cualquier punto de la recta es una solución.

3) Las rectas son paralelas y diferentes, no hay solución.

Aunque no sea con rectas los tres casos se dan en sistemas más grandes: una única solución, un número infinito de soluciones, no hay solución.

2.2 Caso general

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas se puede escribir así:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde los valores a_{ij} y b_i son conocidos. Se desea encontrar el valor de cada una de las incógnitas x_j para que se cumplan todas las ecuaciones.

Ejemplo 2.1.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \pi x_3 + \tfrac{13}{5}x_4 &= 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 10x_3 &= 0 \\ 6.2x_2 + 4x_3 - 0.001x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen exactamente las mismas soluciones. Los métodos válidos son aquellos que paso a paso van obteniendo sistemas equivalentes pero que cada vez sean más fáciles, hasta llegar a un sistema equivalente donde sea muy fácil obtener la solución (si la hay).

Hay tres clases de operaciones con las ecuaciones que permiten obtener sistemas equivalentes:

1. Intercambiar dos ecuaciones, denotado $E_i \leftrightarrow \mathtt{E}_j$.
2. Multiplicar una ecuación por una constante no nula, denotado cE_k .
3. A una ecuación sumar un múltiplo de otra ecuación, denotado $E_k + cE_i$.

2.3 Método de Gauss para sistemas cuadrados

Un sistema de ecuaciones es cuadrado si tiene tantas ecuaciones como incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{2.2}$$

El método de Gauss busca obtener un sistema equivalente triangular superior

$$\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ \ddots \qquad\qquad & & \\ a'_{nn}x_n & = & b'_n \end{array} \tag{2.3}$$

De la última ecuación se obtiene x_n. Con este valor, de la penúltima ecuación, se calcula x_{n-1} y así sucesivamente hasta obtener x_1, usando la primera ecuación.

Ejemplo 2.2. Resolver:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -6x_1 - 9x_2 - 10x_3 &= -19 \\ 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 &= 28 \end{aligned}$$

$E_2 + 3E_1$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_3 &= -4 \\ 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 &= 28 \end{aligned}$$

$E_3 - 5E_1$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_3 &= -4 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$E_2 \leftrightarrow E_3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 3 \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

De la última ecuación se deduce $x_3 = -2$. Remplazando este valor en al segunda ecuación

$$\begin{aligned} -3x_2 - 6x_3 &= 3 \\ -3x_2 - 6(-2) &= 3 \\ -3x_2 + 12 &= 3 \\ -3x_2 &= -9 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

De la primera ecuación

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3(3) + 4(-2) &= 5 \\ 2x_1 + 1 &= 5 \\ 2x_1 &= 4 \\ x_1 &= 2 \end{aligned}$$

En resumen la solución es $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -2$. Se puede comprobar que estos valores satisfacen las tres ecuaciones iniciales.

2.4 Notación matricial

Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

El sistema (2.1) se puede ecribir

$$\begin{aligned} A_{1\star}x &= b_1 \\ A_{2\star}x &= b_2 \\ &\vdots \\ A_{m\star}x &= b_m \end{aligned}$$

Usando (1.12), $A_{i\star}x = (Ax)_{i\star}$. Como Ax es una columna, $(Ax)_{i\star} = (Ax)_i$, es decir, $A_{i\star}x = (Ax)_i$,

$$\begin{aligned} (Ax)_1 &= b_1 \\ (Ax)_2 &= b_2 \\ &\vdots \\ (Ax)_m &= b_m \end{aligned}$$

Las m igualdades anteriores dicen que todas las entradas de Ax y b son iguales, es decir, $Ax = b$. En resumen, el sistema (2.1) se puede escribir de manera compacta

$$Ax = b \tag{2.4}$$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es la **matriz de coeficientes**, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ es la columna de **términos independientes** y $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es la columna de incógnitas.

2.4.1 Matriz ampliada

En lugar de escribir en cada iteración y en cada ecuación x_1, x_2, ... etc., basta con escribir los coeficientes a_{ij} y b_i en una matriz. Esta matriz es la matriz **ampliada** o **aumentada**

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}. \tag{2.5}$$

Las operaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema son exactamente operaciones elementales sobre las filas de la matriz ampliada. Así, el ejemplo anterior del método de Gauss, se puede escribir de manera más simple.

Ejemplo 2.3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ 3x_2 + \ 4x_3 &= 5 \\ -6x_1 - \ 9x_2 - 10x_3 &= -19 \\ 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 &= 28 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -6 & -9 & -10 & -19 \\ 10 & 12 & 14 & 28 \end{bmatrix}$$

$F_2 + 3F_1$
$F_3 - 5F_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$F_2 \leftrightarrow F_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

La última fila se traduce por la ecuación $0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = -4$. Ahí se obtiene $x_3 = -2$. La segunda fila se traduce por $0x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 3$, de donde $x_2 = 3$, etc.

2.5 Caso general, método de Gauss-Jordan

Consideremos el sistema de m ecuaciones con n incógnitas

$$Ax = b \tag{2.6}$$

Se construye la matriz ampliada

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$$

y se obtiene su matriz escalonada reducida

$$E = E_{\hat{A}}\,.$$

2.5.1 Sistema inconsistente

El sistema es inconsistente (no tiene solución) si en $\hat{A}$, o en E, o en una matriz intermedia, se presenta una inconsistencia. Una inconsistencia es una ecuación de la forma

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = \alpha \neq 0\,.$$

En la matriz ampliada inicial, o en una matriz intermedia, o en la matriz escalonada reducida final, una inconsistencia es una fila de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0\,. \tag{2.7}$$

Ejemplo 2.4. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que se obtiene directamente la matriz escalonada reducida, por ejemplo con Scilab.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 20 \end{bmatrix}, \qquad E_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En la tercera fila de $E_{\hat{A}}$ hay una inconsistencia, luego el sistema no tiene solución.

Veamos ahora paso a paso el proceso de obtención de $E_{\hat{A}}$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}F_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$F_2 - F_1, \qquad F_3 - 3F_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 7 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 & -3 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$-2F_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 & 5/2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1/2 & -1 & -3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

$F_1 - \frac{3}{2}F_2, \qquad F_3 + \frac{1}{2}F_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no es escalonada reducida, pero ya se ve una inconsistencia. Luego el sistema no tiene solución. No es necesario continuar con el proceso.

2.5.2 Sistemas consistentes

En un sistema consistente, a partir de $E_{\hat{A}}$ se obtiene la solución o la forma general de las soluciones.

- La variables de las columnas de los pivotes se llaman **variables básicas**.
- Las otras variables se llaman **variables libres, independientes o no básicas**.
- Si no hay variables libres, la solución es única y los valores son los términos independientes en $E_{\hat{A}}$.
- Cuando hay variables libres, las variables básicas se pueden expresar fácilmente en función de las varibles libres.

Ejemplo 2.5. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ -9 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 16 \\ 2 & 3 & 4 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & -9 \\ 3 & 8 & 9 & 18 \end{bmatrix}, \qquad E_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema es consistente y no hay variables libres, luego la solución es única:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = 4.$$

Ejemplo 2.6. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 18 \end{bmatrix}, \quad E_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema es consistente. Las variables básicas son x_1 y x_2. Las variables libres son x_3 y x_4. Las dos primeras filas representan las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 + x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_3 - 3x_4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para obtener una solución basta con dar cualquier valor a x_3 y x_4 y calcular los valores de x_1 y x_2. Por ejemplo,

$$\begin{array}{llll} x_1 = -2 & x_1 = -1 & x_1 = 0 & x_1 = -22 \\ x_2 = 6 & x_2 = 4 & x_2 = 3 & x_2 = 31 \\ x_3 = 0 & x_3 = 1 & x_3 = 0 & x_3 = 10 \\ x_4 = 0 & x_4 = 0 & x_4 = 1 & x_4 = -15 \end{array}$$

La solución general se puede escribir de manera matricial así (para valores cualesquiera de α y β):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Después del signo igual, la primera columna es simplemente la solución obtenida para $x_3 = 0$ y $x_4 = 0$.

La segunda columna está orientada por x_3 y tiene dos partes. La correspondiente a las variables básicas tiene los coeficientes de x_3 en (2.8). La correspondiente a las variables libres tiene los valores $x_3 = 1$ y cero para las demás variables libres.

La tercera columna está orientada por x_4 y también tiene dos partes. La correspondiente a las variables básicas tiene los coeficientes de x_4 en (2.8). La correspondiente a las variables libres tiene los valores $x_4 = 1$ y cero para las demás variables libres.

2.6 Método de Gauss para sistemas cuadrados con solución única

El método de Gauss se usa para sistemas cuadrados que se suponen de solución única, aunque esta última condición no se conozca por adelantado. Requiere menos operaciones que el método de Gauss-Jordan. Es la base del método usado para sistemas cuadrados generales (no de estructura específica) en la mayoría de los programas de computador.

Simplemente se busca triangularizar el sistema, como en un ejemplo anterior, utilizando la matriz ampliada. Una vez triangularizado el sistema, se calcula x_n, después x_{n-1}, después x_{n-2}, y así sucesivamente hasta obtener x_1.

- El pivote siempre debe quedar en las entradas diagonales y no es necesario que valga 1.
- Si no es posible obtener un pivote en las entradas diagonales, es decir, si durante el proceso de triangularización, buscando el pivote en a_{kk}, todo el pedazo de columna $A(k:n,k) = 0$, entonces el sistema no es de solución única, o sea, puede ser inconsistente o tener un número infinito de soluciones. Sería necesario continuar con el método de Gauss-Jordan.
- Las operaciones elementales usadas son el intercambio de filas y sumar a una fila un múltiplo de otra fila. Normalmente no es necesario multiplicar una fila por una constante.

Ejemplo 2.7. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 10 & 35 & 42 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 35 & 42 & 41 \end{bmatrix}$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 10 & 35 & 42 & 41 \end{bmatrix}$$

$F_3 - 5F_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

$F_3 - 4F_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces $x_3 = -2, \quad x_2 = 3, \quad x_1 = 2\,.$

Ejemplo 2.8. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -8 & 8 & 16 \\ 10 & -10 & -10 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -24 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -4 \\ -8 & 8 & 16 & -24 \\ 10 & -10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$F_2 - 4F_1$
$F_3 + 5F_1$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -2 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

La porción de columna $A(2:3,2)$ es nula, luego no es un sistema de solución única y no se puede continuar con el método de Gauss. Si se desea continuar se debe utilizar el método de Gauss-Jordan.

2.7 Solución usando la inversa

La solución de un sistema $Ax = b$ cuando A es cuadrada e invertible se puede obtener mediante

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ Ix &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Esta forma de solución es teóricamente perfecta, pero en la mayoría de los casos requiere más operaciones que el método de Gauss y el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo 2.9. Resolver el sistema $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 10 & 35 & 42 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 41 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 10 & 35 & 42 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 41 \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} -7/10 & 0 & 1/10 \\ -11/5 & -3 & 3/5 \\ 2 & 5/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 41 \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.8 Sistemas homogéneos

Un **sistema homogéneo** es simplemente un sistema de ecuaciones lineales donde todos los términos independientes son nulos, es decir,

$$Ax = 0\,. \tag{2.10}$$

A diferencia de los sistemas generales (no homogéneos), un sistema homogéneo siempre tiene solución, ya que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, llamada **solución trivial**, siempre es solución. Hay dos casos:

- La solución trivial es la única solución.
- Hay un número infinito de soluciones, es decir, hay soluciones diferentes de la trivial.

Los métodos vistos para sistemas no homogéneos se utilizan para sistemas homogéneos. Como siempre los términos indpendientes van a ser nulos, no importa la operación elemental que se efectúe, no es necesario construir la matriz ampliada y se puede simplemente trabajar con A.

Ejemplo 2.10. Resolver $Ax = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego hay una única solución, la trivial, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Ejemplo 2.11. Resolver $Ax = 0$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ -6 & -9 & -11 & -16 \\ 4 & 6 & 9 & 14 \\ -2 & -3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego hay un número infinito de soluciones

$$x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + x_4$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Algunas veces puede ser útil el siguiente resultado relativo a los dos sistemas, no homogéneo y homogéneo, con la misma matriz de coeficientes, suponiendo que **el sistema no homogéneo es consistente**.

$$Ax = b \tag{2.13}$$
$$Ax = 0 \tag{2.14}$$

El sistema no homogéneo tiene una única solución sssi el sistema homogéneo tiene una única solución. Cualquier solución del sistema no homogéneo es igual a una solución particular del sistema no homogéneo, más una solución del sistema homogéneo.

$$x_{\mathrm{GNH}} = x_{\mathrm{PNH}} + x_{\mathrm{GH}} \tag{2.15}$$

Los subíndices quieren decir: la solución general del sistema no homogéneo es igual a una solución particular del sistema no homogeneo más la solución general del sistema homogéneo.

3

Determinantes

El determinate es una función que se aplica a las matrices cuadradas dando como resultado un número:

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

A continuación veremos dos formas de calcular el determinante. Hay una tercera por medio de permutaciones pero no está en este documento. Para $n = 1, 2$, la definición es muy sencilla:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11} \tag{3.1}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1.

$$\det \begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix} = -4$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} = 2(-5) - 4(3) = -22\,.$$

3.1 Cálculo recurrente (por menores)

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A_{ij} es una matriz de tamaño $(n-1) \times (n-1)$, submatriz de A, obtenida al quitar de A la fila i y la columna j.

Ejemplo 3.2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

El cálculo recurrente del determinante de una matriz $n \times n$ se hace utilizando determinates de matrices $(n-1)\times(n-1)$, que a su vez se obtienen por medio de determinantes $(n-2)\times(n-2)$ y así sucesivamente.

El cálculo del determinante por medio de la primera fila es:

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \det(A_{11}) + (-1)^{1+2} a_{12} \det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}) \tag{3.3}$$

Para una matriz 3×3,

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13})$$

Ejemplo 3.3.

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} &= 2 \det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} - 3 \det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 4 \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ &= 2(6 - 63) - 3(5 - 56) + 4(45 - 48) \\ &= 2(-57) - 3(-51) + 4(-3) \\ &= 27\,.\end{aligned}$$

El determinante de A_{ij} se llama el **menor** (i, j) y usualmente se denota por M_{ij}, es decir

$$M_{ij} = M_{ij}(A) = \det(A_{ij}) \tag{3.4}$$

Asi:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

El determinante se puede calcular por cualquier fila, no solo la primera, o por cualquier columna:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \text{por la fila } i \tag{3.5}$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \qquad \text{por la columna } j\,. \tag{3.6}$$

Ejemplo 3.4. Cálculo del determinante por la segunda columna.

$$\begin{aligned}\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix} &= -3 \det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + 6 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} - 9 \det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ &= -3(5 - 56) + 6(2 - 32) - 9(14 - 20) \\ &= -3(-51) + 6(-30) - 9(-6) \\ &= 27\,.\end{aligned}$$

Una manera sencilla de calcular el determinante de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es mediante la **Regla de Sarrus**:

1. Construir una tabla con las tres filas de A y debajo la primera y la segunda fila.
2. El determinante de A es igual a la suma de los productos “bajando” menos la suma de los productos “subiendo”.

Ejemplo 3.5. Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot 5 \cdot 9 \ + \ 4 \cdot 8 \cdot 3 \ + \ 7 \cdot 2 \cdot 6 - (7 \cdot 5 \cdot 3 \ + \ 1 \cdot 8 \cdot 6 \ + \ 4 \cdot 2 \cdot 9) \\ &= 45 + 96 + 84 - (105 + 48 + 72) \\ &= 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

Para calcular el determinante de una matriz 4×4 es necesario calcular cuatro determinantes 3×3. Normalmente se escoge la fila o columna con más ceros.

Ejemplo 3.6.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} - (-3) \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2(0) + 3(-6) = -18$$

3.2 Propiedades

1. A es invertible sssi $\det(A) \neq 0$.

2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

3. $\det(A^n) = (\det(A))^n$.

4. $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A)$.

5. Si A es diagonal, triangular superior o triangular inferior,

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \tag{3.7}$$

6. Si A tiene una fila nula, entonces $\det(A) = 0$.

7. Si A tiene dos filas iguales, entonces $\det(A) = 0$.

8. Si una fila de A es un múltiplo de otra fila de A, entonces $\det(A) = 0$.

9. Si una fila de A es combinación lineal de otras filas de A, entonces $\det(A) = 0$.

10. Si A es invertible,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{3.8}$$

11. Si en A se intercambian dos filas, el determinante cambia de signo.

12. Si se multiplica una fila de A por una constante, el determinante queda multiplicado por esa constante.

13. $\det(cA) = c^n \det(A)$.

14. Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el determinante no se altera.

15. Las propiedades anteriores relativas a las filas, también son válidas para columnas.

16. Si A se puede expresar como una matriz triangular superior por bloques con bloques diagonales cuadrados, su determinante es el producto de los determinantes de los bloques diagonales:

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix} = \det(A_{11}) \det(A_{22}) \cdots \det(A_{pp})$$

Ejemplo 3.7. Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se puede escribir como una matriz triangular superior por bloques, con bloques diagonales cuadrados:

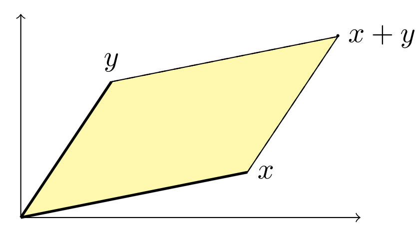
$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 7 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \det(6) \det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ &= (-1)(6)(-2) = 12. \end{aligned}$$

3.3 Áreas y volúmenes

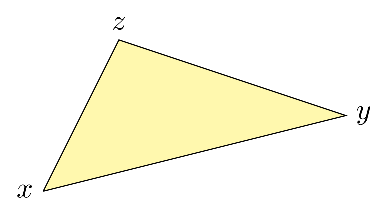
⋆ Sean x, y dos puntos de $\mathbb{R}^2$. El origen, x y y no deben ser colineales. El área del paralelogramo determinado por: $(0,0)$, x y y (el paralelogramo de vértices $(0,0)$, x, $x+y$ y y) es

$$A = \left|\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}\right| \tag{3.9}$$



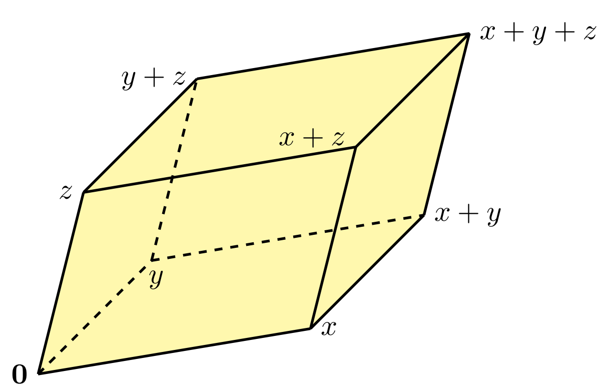
⋆ Sean x, y, z tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^2$. El área del triángulo con estos vértices es:

$$A = \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \end{bmatrix}\right| \tag{3.10}$$



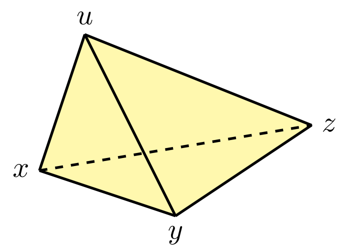
⋆ Sean x, y, z tres puntos no colineales de $\mathbb{R}^3$. El volumen del paralelepípedo determinado por x, y y z, es decir, con vértices 0, x, $x+y$, y, z, $x+z$, $x+y+z$, $y+z$ es:

$$V = \left|\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}\right| \tag{3.11}$$



⋆ Sean x, y, z, u cuatro puntos no coplanares de $\mathbb{R}^3$. El volumen del tetraedro con estos vértices es:

$$V = \frac{1}{6}\left|\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 1 \end{bmatrix}\right| \tag{3.12}$$



Ejemplo 3.8. Hallar el área del paralelogramo de vértices $(2,1)$, $(7,2)$, $(9,5)$, $(4,4)$.

Primero es necesario hacer una traslación para convertir un vértice en el origen. Por ejemplo restando a cada vértice $(2,1)$. Los nuevos vértices con: $(0,0)$, $(5,1)$, $(7,4)$, $(2,3)$.

$$\begin{aligned} A &= \left|\det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right| \\ A &= |13| = 13. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.9. Hallar el área del triángulo con vértices $(3,1)$, $(1,1)$, y $(2,4)$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}|-6| \\ &= 3 \end{aligned}$$

También, conocidos los valores a, b, c, longitudes de los lados, se puede usar la fórmula de Herón de Alejandría:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \\ p &= (a+b+c)/2, \text{ el semiperímetro.} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} a &= ||(1,1)-(3,1)|| = 2 \\ b &= ||(1,1)-(2,4)|| = \sqrt{10} \\ c &= ||(3,1)-(2,4)|| = \sqrt{10} \\ p &= \sqrt{10}+1 \\ A &= \sqrt{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}+1-2)(\sqrt{10}+1-\sqrt{10})(\sqrt{10}+1-\sqrt{10})} \\ A &= \sqrt{(\sqrt{10}+1)(\sqrt{10}-1)} = \sqrt{10-1} \\ A &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.10. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por puntos $(1,2,3)$, $(5,2,1)$, $(1,1,6)$,

$$\begin{aligned} V &= \left|\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}\right| \\ &= |-38| = 38 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11. Hallar el volumen del tetraedro con vértices $(1, 1, 0)$, $(5, 1, 0)$, $(3, 3, 0)$ y $(2, 3, 5)$.

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 5 & 1\end{bmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}|-40| = \frac{20}{3}
\end{aligned}
$$

En este ejemplo sencillo, el volumen se puede calcular teniendo en cuenta que se puede considerar la base formada por los tres primeros vértices, los tres tienen tercera coordenada nula. El área de ese triángulo es la misma del triángulo de vértices $(1, 1)$, $(5, 1)$ y $(3, 3)$. Esta área es $(4 \times 2)/2 = 4$. El volumen del tetraedro es $Bh/3$, un tercio del área de la base por la altura, $V = 4 \times 5/3 = 20/3$.

3.4 Cálculo del determinante por el método de Gauss

Es el método más usado y, para matrices sin una estructura particular, el más eficiente (menor número de operaciones). Consiste simplemente en triangularizar la matriz mediante operaciones del tipo $F_i \leftrightarrow F_j$ o $F_k + cF_i$. El determinante de la matriz triangular superior resultante es simplemente el producto de las entradas diagonales. El determinante de la matriz inicial es igual al determinante final multiplicado por -1 elevado al número de intercambios.

Si en la iteración j (se desea obtener ceros en la columna j debajo de la diagonal) no es posible obtener un pivote nulo, es decir, $A(j : n, j) = 0$, el determinate de la matriz vale cero.

Ejemplo 3.12. Calcular el determinante de

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -4\\ 2 & -2 & 3 & 4\\ -10 & 7 & -23 & -27\\ 4 & -4 & 4 & -4\end{bmatrix}
$$

$F_1 \leftrightarrow F_2$

$$
\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ -10 & 7 & -23 & -27\\ 4 & -4 & 4 & -4\end{bmatrix}
$$

$F_3 + 5F_1, \quad F_4 - 2F_1$

$$
\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ 0 & -3 & -8 & -7\\ 0 & 0 & -2 & -12\end{bmatrix}
$$

$F_3 - 3F_2$

$$
\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & -2 & -12\end{bmatrix}
$$

$F_4 + 2F_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

El determinante de la última matriz es $2(-1)(1)(-2) = 4$. Como hubo un intercambio, entonces el $\det(A) = -4$.

Ejemplo 3.13. Calcular el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -14 & -21 & -23 \\ 12 & 18 & 30 \end{bmatrix}$$

$F_2 + 7F_1, \quad F_3 - 6F_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Como no se puede colocar un pivote adecuado en la posición $(2,2)$, (es decir, $A(2:3,2) = 0$), entonces $\det(A) = 0$.

3.5 Cálculo de la inversa

Dada una matriz cuadrada, el **cofactor** en la posición (i,j) es

$$C_{ij} = C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ij}\,. \tag{3.14}$$

La **matriz adjunta** es la matriz formada por los cofactores,

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Dos resultados importantes relacionados:

$$A \operatorname{adj}(A)^{\mathrm{T}} = \det(A)\, I \tag{3.15}$$

Si $\det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)^{\mathrm{T}}\,. \tag{3.16}$$

Ejemplo 3.14.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix} \\
\det(A) &= 3 \\
C_{11} &= (-1)^{1+1} \det \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = -9 \\
C_{12} &= (-1)^{1+2} \det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = 11 \\
C_{13} &= (-1)^{1+3} \det \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = -3 \\
&\vdots \\
A^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & 11 & -3 \\ 9 & -14 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
A^{-1} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -9 & 9 & -3 \\ 11 & -14 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

3.6 Regla de Cramer

Permite resolver un sistema de ecuaciones cuadrado $Ax = b$, con A invertible:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det \begin{bmatrix} b & A_{\star 2} & A_{\star 3} & \cdots & A_{\star n} \end{bmatrix}}{\det(A)} \\
x_2 &= \frac{\det \begin{bmatrix} A_{\star 1} & b & A_{\star 3} & \cdots & A_{\star n} \end{bmatrix}}{\det(A)} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{\det \begin{bmatrix} A_{\star 1} & A_{\star 2} & \cdots & A_{\star n-1} & b \end{bmatrix}}{\det(A)}
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

Para calcular x_i, en el numerador está el determinante de una matriz obtenida de A quitando la columna i y remplazándola por b.

Ejemplo 3.15. Resolver $Ax = b$, donde

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 9 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 25 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= 3 \\
x_1 &= \frac{\det\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 14 & 6 & 7 \\ 25 & 9 & 9 \end{bmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2 \\
x_2 &= \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \\ 8 & 25 & 9 \end{bmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = 3 \\
x_3 &= \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 14 \\ 8 & 9 & 25 \end{bmatrix}}{3} = \frac{-6}{3} = -2\,.
\end{aligned}
$$

4

Espacios vectoriales

4.1 Definición y ejemplos

El concepto de espacio vectorial es la abstracción de las características más importantes de los vectores usados en Física (por ejemplo, las fuerzas) o también de las matrices y de otros conjuntos usados en Matemáticas.

Un espacio vectorial es simplemente un conjunto en el que hay definidas dos operaciones, suma y producto, que cumplen ciertas propiedades. La suma es entre elementos del conjunto. El producto es entre un número real y un elemento del conjunto.

Definición 4.1. Un **espacio vectorial real** es una terna o tripla $(V, \text{suma}, \text{producto})$, donde V es un conjunto no vacío, suma es una operación entre elementos de V, denotada $x + y$, y producto es una operación entre un número real y un elemento de V, denotada simplemente αx (o algunas veces por $x\alpha$), con las siguientes propiedades:

$$
\begin{array}{lll}
\text{S.0} & \text{Para todo } x, y \in V, & x + y \in V. \\
\text{S.1} & \text{Para todo } x, y, z \in V, & (x + y) + z = x + (y + z). \\
\text{S.2} & \text{Para todo } x, y \in V, & x + y = y + x. \\
\text{S.3} & \text{Existe un elemento } \mathbf{0} \in V, \text{ tal que para todo } x \in V, & x + \mathbf{0} = x. \\
\text{S.4} & \text{Para todo } x \in V \text{ existe } \tilde{x} \in V \text{ tal que} & x + \tilde{x} = 0. \\
 & & \\
\text{P.0} & \text{Para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x \in V, & \alpha x \in V. \\
\text{P.1} & \text{Para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x \in V, & \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x. \\
\text{P.2} & \text{Para todo } x \in V, & 1x = x. \\
 & & \\
\text{D.1} & \text{Para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x \in V, & (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \\
\text{D.2} & \text{Para todo } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x, y \in V, & \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.
\end{array}
\tag{4.1}
$$

Los elementos de V se llaman **vectores**. En el producto αx, α es llamado el **escalar**. Así, el producto también se conoce con el nombre de **producto por escalar**. Mientras no haya lugar a confusión, el elemento especial $\mathbf{0} \in V$ se denotará simplemente por 0. Para cada $x \in V$, el elemento especial $\tilde{x}$ tal que $x + \tilde{x} = 0$, se llama **inverso aditivo** de x y se denota simplemente por $-x$. Así, se habla de resta, es decir, $x - y$ es simplemente $x + (-y)$. Por la propiedad S.1, se puede escribir simplemente $x + y + z$. De manera análoga, por la propiedad P.1, se puede escribir simplemente $\alpha\beta x$.

Las propiedades de la suma se llaman, clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa e invertiva (nombre no muy frecuente). Las propiedades del producto escalar se llaman clausurativa, asociativa y modulativa. Las dos últimas propiedades son distributivas.

Propiedades adicionales , que no hacen parte de la definición:

$$0x = \mathbf{0} \tag{4.2}$$
$$(-1)x = -x \tag{4.3}$$

También hay espacios vectoriales complejos, en ellos el producto por escalar se hace con un escalar en $\mathbb{C}$. En este documento, mientras no se diga lo contrario, si se habla de un espacio vectorial, se trata de un espacio vectorial real.

En un espacio vectorial, dos vectores no nulos son **paralelos** si uno es un múltiplo del otro. Sea V un espacio vectorial, $x, y \in V$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ son paralelos si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \alpha y. \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.1. El conjunto de matrices $\mathbb{R}^{m\times n}$ con la suma y producto definidos en (1.1) y (1.2), es un espacio vectorial real.

Ejemplo 4.2. El conjunto de números reales $\mathbb{R}$, con la suma y producto usuales, también es un espacio vectorial real. Claro está que $\mathbb{R}$ cumple otras propiedades y también es un cuerpo (estructura algebraica más sofisticada), pero es un espacio vectorial.

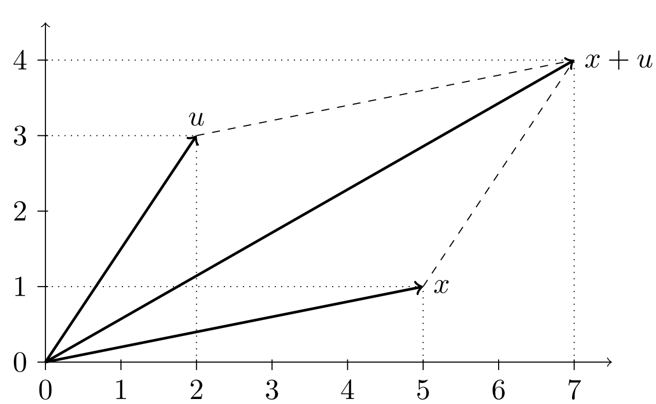
Ejemplo 4.3. El conjunto $\mathbb{R}^2$, es el conjunto de todas las parejas ordenadas reales,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{4.5}$$

$\mathbb{R}^2$ representa el conjunto de puntos del plano cartesiano, la primera coordenada es la coordenada horizontal o abscisa o coordenada "x", la segunda es la vertical u ordenada o coordenada "y". El punto (x_1, x_2) también representa el vector que va desde el punto $(0, 0)$ al punto (x_1, x_2).

La suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^2$ se definen así:

$$x + u = (x_1, x_2) + (u_1, u_2) = (x_1 + u_1, x_2 + u_2) \tag{4.6}$$
$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \tag{4.7}$$



$\mathbb{R}^2$, con esa suma y producto, es un espacio vectorial.

Si se desea demostrar que un conjunto, definida la suma y el producto, es un espacio vectorial, es necesario demostrar que se cumplen todas las propiedades. Generalmente estas demostraciones están basadas en las propiedades de lo números reales. Si se desea demostrar que no es espacio vectorial, basta con dar un contraejemplo, es decir, un ejemplo donde no se cumple una propiedad.

Por abuso de lenguaje y si no se presenta ambigüedad, frecuentemente no se dice de manera completa que tal conjunto con tal suma y tal producto es un espacio vectorial, sino que simplemente tal conjunto es un espacio vectorial, sobreentendiéndose que la suma y el producto están definidas de manera "natural". Así, por ejemplo, se dice frecuentemente, "$\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial", sobreentendiendo la suma y producto naturales o canónicos (4.6) y (4.7).

Ejemplo 4.4. El conjunto $\mathbb{R}^3$, es el conjunto de todas las triplas o ternas ordenadas reales,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}. \tag{4.8}$$

$\mathbb{R}^3$ representa el conjunto de puntos del espacio, la primera coordenada es la coordenada "x", la segunda es la coordenada "y" y la tercera es la coordenada "z". El punto (x_1, x_2, x_3) también representa el vector que va desde el punto $(0, 0, 0)$ al punto (x_1, x_2, x_3).

De manera análoga a $\mathbb{R}^2$, la suma y producto se definen así:

$$x + y = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \tag{4.9}$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \tag{4.10}$$

$\mathbb{R}^3$, con esa suma y producto, es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.5. La generalización de los espacios anteriores es

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\}, \tag{4.11}$$

con las operaciones

$$x + y = (x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \tag{4.12}$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n) \tag{4.13}$$

También es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.6.

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\},$$

con las operaciones

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

no es un espacio vectorial. Basta con mostrar un caso de una propiedad que no se cumpla. El producto $0.5(4, 7) = (2, 3.5)$ no está en $\mathbb{Z}^2$.

Ejemplo 4.7. El conjunto $\mathcal{Q}_2$ de polinomios de grado 2 (en una sola variable) con la suma y producto por escalar "naturales" no es un espacio vectorial.

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 3x - 4 \\ q(x) &= -x^2 \\ p(x) + q(x) &= 3x - 4 \quad \text{no está en } \mathcal{Q}_2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8. El conjunto $\mathcal{P}_2$ de polinomios de grado menor o igual a 2, con la suma y producto por escalar "naturales" es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.9. El conjunto $\mathcal{P}_n$ de polinomios de grado menor o igual a n es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.10. El conjunto de todos los polinomios es un espacio vectorial.

Ejemplo 4.11. El conjunto de todas las funciones, de los reales en los reales, continuas, es un espacio vectorial.

Hay tres conjuntos que son muy parecidos, pero son diferentes

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{1\times n} &: \text{matrices fila} \\ \mathbb{R}^{n\times 1} &: \text{matrices columna} \\ \mathbb{R}^{n} &: n\text{-uplas} \end{aligned}$$

Para simplificar, en este documento, los conjuntos $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y $\mathbb{R}^n$ son exactamente iguales. Así, según la conveniencia o facilidad de escritura,

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$x^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

4.2 Subespacios

En un espacio vectorial V, un subconjunto U es un **subespacio vectorial** de V, si U también es un espacio vectorial para la suma y producto definidos en V.

Para demostrar que U es un subespacio vectorial de V, sería necesario demostar que en U se cumplen las diez propiedades (4.1). El siguiente teorema permite la comprobación de una manera muchos más corta.

Teorema 4.1. *Sea $(V, suma, producto)$ un espacio vectorial, $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$. U es un subespacio vectorial de V sssi:*

- *Para todo x, y en U, también $x + y$ está en U.*
- *Para todo x en U y para todo α en R, también αx está en U.*

En otras palabras, U es subespacio de V sssi U es cerrado para la suma y para el producto por escalar.

Una pequeña conclusión indica que si 0 no está en U, entonces U no es un subespacio de V. Sin embargo, es posible que 0 esté en U y que U no sea subespacio vectorial de V.

Ejemplo 4.12. En cualquier espacio vectorial V, los conjuntos V y $\{0\}$ son subespacios de V. Son los subespacios "triviales" de V.

En general la unión de dos subespacios no es un subespacio, pero la intersección sí.

Teorema 4.2. *Sea V un espacio vectorial, U y W subsepacios vectoriales de V, entonces $U \cap W$ también es un subespacio vectorial de V. En general, si hay 3, 4, o cualquier cantidad de subespacios, la intersección de todos ellos, también es un subespacio.*

Ejemplo 4.13. Considere $\mathbb{R}^2$. Averigüe si la recta

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2x_1\}.$$

es un subespacio.

Sean $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in U$. Entonces $x_2 = 2x_1$ y $y_2 = 2y_1$. $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_2 + y_2 = 2x_1 + 2y_1 = 2(x_1 + y_1)$. Luego $x + y \in U$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\alpha x_2 = \alpha 2x_1 = 2(\alpha x_1)$, luego $\alpha x \in U$. Luego U es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.14. Considere $\mathbb{R}^2$. Averigüe si la recta

$$U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1 + 3\}.$$

es un subespacio.

El punto $(0, 0)$ no está en U, luego U no es un subespacio.

$\star$ Los únicos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son: $\mathbb{R}^2$, $\{(0, 0)\}$ y las rectas que pasan por el origen.

4.2.1 Rectas en $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$ una recta se puede representar de varias maneras. Las dos formas más usadas son las dadas por las ecuaciones

$$x_2 = mx_1 + b \tag{4.16}$$
$$cx_1 + dx_2 = e \tag{4.17}$$

La primera no permite representar las rectas verticales. La segunda forma permite representar todas las rectas. Únicamente se requiere que por lo menos uno de los valores c y d sea diferente de cero.

En la primera forma una recta está determinada de manera única por los valores m y b, es decir, si cambia m o si cambia b, se tiene otra recta. En la segunda forma, dos ecuaciones aparentemente diferentes, definen la misma recta. Por ejemplo

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ -4x_1 + 6x_2 &= -8 \end{aligned}$$

Para las rectas que pasan por el origen, las ecuaciones son

$$x_2 = mx_1 \tag{4.18}$$
$$cx_1 + dx_2 = 0 \tag{4.19}$$

También se puede definir una recta que pasa por el origen como el conjunto de puntos múltiplos de un vector no nulo,

$$\{\, t(p_1, p_2) \,:\, t \in \mathbb{R}\} \tag{4.20}$$

por ejemplo

$$\{\, t\,(6, -7) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Los siguientes conjuntos, rectas que pasan por el origen, son exactamente iguales

$$\begin{aligned}&\{(x_1, x_2) : x_2 = 2x_1\},\\ &\{(x_1, x_2) : 2x_1 - x_2 = 0\},\\ &\{(x_1, x_2) : -4x_1 + 2x_2 = 0\},\\ &\{t(2, 4) : t \in \mathbb{R}\},\\ &\{s(-3, -6) : s \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

4.2.2 Rectas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$

Más adelante se verá el caso general de las rectas en $\mathbb{R}^n$. En esta subsección está el resumen sobre las rectas de $\mathbb{R}^3$ o de $\mathbb{R}^n$ que pasan por el origen. La caracterización (4.20) de la recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen se puede generalizar inmediatamente a $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^n$.

Dado $(p_1, p_2, p_3) \neq (0, 0, 0)$, el conjunto

$$\{\, t(p_1, p_2, p_3) \ :\ t \in \mathbb{R}\} \tag{4.21}$$

es una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Es la **recta paralela** al vector (p_1, p_2, p_3).

Dado $(p_1, p_2, ..., p_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, el conjunto

$$\{\, t(p_1, p_2, ..., p_n) \ :\ t \in \mathbb{R}\} \tag{4.22}$$

es una recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por el origen. Es la **recta paralela** al vector $(p_1, p_2, ..., p_n)$.

Sean $p \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. La recta $\{tp : t \in \mathbb{R}\}$ es igual a la recta $\{tq : t \in \mathbb{R}\}$ sssi p y q son paralelos.

Ejemplo 4.15. Una recta que pasa por el origen es un subespacio. No importa que sea un recta de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^n$.

4.2.3 Planos

En $\mathbb{R}^3$ el conjunto de puntos que cumplen la ecuación

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 12$$

es un plano.

Sea $(c_1, c_2, c_3) \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : c^{\mathrm{T}}x = \alpha\} \tag{4.23}$$

es un plano. El conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : c^{\mathrm{T}}x = 0\} \tag{4.24}$$

es un plano que pasa por el origen (o que contiene al origen).

Ejemplo 4.16. Un plano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.17. Averigüe si la intersección de los planos definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

es un subespacio. En caso afirmativo, dar la forma general de sus elementos.

Como se trata de dos planos que pasan por el origen, es decir subespacios, su intersección también es un subespacio.

En el caso general de la intersección de 2 planos hay tres posibilidades:

- Los dos planos son paralelos y su intersección es vacía.
- Los dos planos son diferentes y no paralelos, su intersección es una recta.
- Se trata de dos planos iguales y su intersección es el mismo plano.

Para la intersección de dos planos que pasan por el origen, hay únicamente dos posibilidades:

- Los dos planos son diferentes, su intersección es una recta que pasa por el origen.
- Se trata de dos planos iguales y su intersección es el mismo plano.

Para el ejemplo, es necesario resolver el sistema homogéneo, llevando la matriz de coeficientes a escalonada reducida.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 &= \frac{1}{2}x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Forma general de la solución

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La intersección de los dos planos es la recta que pasa por el origen, paralela a $(-1/2, 1/2, 1)$.

⋆ Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son: $\mathbb{R}^3$, $\{(0,0,0)\}$, los planos que pasan por el origen y las rectas que pasan por el origen.

4.2.4 Hiperplanos

El concepto de plano en $\mathbb{R}^3$ se puede generalizar a hiperplano en $\mathbb{R}^n$.

Sea $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Un **hiperplano** es un conjunto de la forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \alpha\} = \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}}x = \alpha\}. \tag{4.25}$$

Los hiperplanos de $\mathbb{R}^3$ son los planos, los hiperplanos de $\mathbb{R}^2$ son las rectas, los hiperplanos de $\mathbb{R}$ son los puntos.

Ejemplo 4.18. Un hiperplano que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^5$ que satisfacen

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 10x_5 = 0$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^5$.

4.2.5 Espacio nulo de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, su **espacio nulo**, **núcleo** o **kernel**, es el conjunto

$$N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}. \tag{4.26}$$

Fácilmente se comprueba de manera directa que N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. O también, cada ecuación del sistema homogéneo es de la forma $A_{i\star}x = 0$, es decir, cada ecuación define un hiperplano que pasa por el origen, o sea, el espacio nulo de A es simplemente la intersección de m hiperplanos que pasan por el origen, luego N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Vale anotar que $A_{i\star}x = 0$ corresponde a un hiperplano solamente si $A_{i\star} \neq 0$. Cuando $A_{i\star}$ es una fila nula, el conjunto de puntos que cumplen la ecuación $A_{i\star}x = 0$ es todo $\mathbb{R}^n$.

Generalmente no basta con saber que N_A es un subespacio, es útil conocer la forma de los elementos de N_A. Esto se logra llevando A a la forma escalonada reducida y expresando la solución o las soluciones en función de las variables libres.

Ejemplo 4.19. Halle N_A para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

La matriz escalonada reducida es

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Traducido a ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Entonces $N_A = \{(0, 0, 0)\}$.

Ejemplo 4.20. Halle N_A para
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$
La matriz escalonada reducida es
$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Traducido a ecuaciones,
$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

O también
$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Entonces N_A es el conjunto de vectores de la forma anterior, donde s y t pueden tomar cualquier valor.

El siguiente teorema muestra una caracterización de los subespacios de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 4.3. *Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ es el espacio nulo de alguna matriz.*

En esta caracterización no hay unicidad, es decir, dado un subespacio U hay muchas matrices A tales que $N_A = U$.

4.3 Combinaciones lineales y espacio generado

Sea V un espacio vectorial, v^1, v^2, ..., $v^k \in V$, α_1, α_2, ..., $\alpha_k \in \mathbb{R}$. El elemento de V
$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k \tag{4.27}$$
es una **combinación lineal** de v^1, v^2, ..., v^k.

Por ejemplo, sean $v^1 = (1, 2, 3)$, $v^2 = (1, 0, -1)$. Entonces $u = (-1, 4, 9)$ es combinación lineal de v^1 y v^2 ya que
$$u = 2v^1 - 3v^2 .$$
El **conjunto generado** por v^1, v^2, ..., v^k es el conjunto de todas las combinaciones lineales de v^1, v^2, ..., v^k:
$$\text{gen}(v^1, v^2, ..., v^k) = \{\, \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k \ :\ \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} \,\}. \tag{4.28}$$

Por la definición de combinaciones lineales, $\text{gen}(v^1, ..., v^k)$ es un subconjunto no vacío de V. Además cumple la importante siguiente propiedad.

Teorema 4.4. *Sea V un espacio vectorial, v^1, v^2, ..., $v^k \in V$, entonces gen$(v^1, ..., v^k)$ es un subespacio vectorial de V.*

Ejemplo 4.21. Encuentre la forma del espacio generado por $v^1 = (2, 3, 4)$, $v^2 = (6, 0, 1)$.

Como v^1, v^2 están en $\mathbb{R}^3$, entonces $G = \text{gen}(v^1, v^2)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 &= (x_1, x_2, x_3) \\ \alpha_1(2,3,4) + \alpha_2(6,0,1) &= (x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Al desarrollar e igualar coordenada a coordenada,

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 &= x_1 \\ 3\alpha_1 + 0\alpha_2 &= x_2 \\ 4\alpha_1 + 1\alpha_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Aquí las incógnitas son α_1 y α_2. La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & x_1 \\ 3 & 0 & x_2 \\ 4 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$$

Al buscar una matriz escalonada reducida hasta la columna 2, las primeras operaciones dan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2}x_1 \\ 3 & 0 & x_2 \\ 4 & 1 & x_3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{2}x_1 \\ 0 & -9 & -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \\ 0 & -11 & -2x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3}x_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{9}x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6}x_1 - \frac{11}{9}x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Para que este sistema sea consistente se requiere que

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}x_1 - \frac{11}{9}x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + \frac{22}{3}x_2 - 6x_3 &= 0 \\ x_1 &= -\frac{22}{3}x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

Así, los puntos que están en G son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -22/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se puede evitar el trabajo con x_1, x_2 y x_3 y hacer las cuentas únicamente con sus coeficientes. Para esto se contruye una matriz, pegando a la derecha de la matriz inicial, la identidad (en este ejemplo, I_3).

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora se calcula la matriz escalonada reducida parcial hasta la columna 2 (véase 1.6.3).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/6 & -1/9 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & -11/9 & 1 \end{bmatrix}$$

Se observa claramente que en las tres últimas columnas están los coeficentes de x_1, x_2 y x_3 obtenidos anteriormente.

Ejemplo 4.22. Encuentre la forma del espacio generado por $v^1 = (0, 1, 2)$, $v^2 = (3, 4, 5)$, $v^3 = (6, 7, 0)$.

Como v^1, v^2 y v^3 están en $\mathbb{R}^3$, entonces $G = \text{gen}(v^1, v^2, v^3)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3) \in G$, entonces

$$\alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 = (x_1, x_2, x_3)$$

Al desarrollar e igualar coordenada a coordenada,

$$\begin{aligned} 0\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3 &= x_1 \\ 1\alpha_1 + 4\alpha_2 + 7\alpha_3 &= x_2 \\ 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 0\alpha_3 &= x_3 \end{aligned}$$

Este sistema es cuadrado, el determinante de la matriz es -24, luego siempre tiene solución (además única), luego $G = \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 4.23. Encuentre la forma del espacio generado por $v^1 = (2, 3, 4, 5)$, $v^2 = (6, 7, 8, 9)$, $v^3 = (8, 10, 12, 14)$, $v^4 = (4, 6, 8, 10)$.

Como v^1, v^2, ... están en $\mathbb{R}^4$, entonces $G = \text{gen}(v^1, v^2, v^3, v^4)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Sea $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in G$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \alpha_3 v^3 + \alpha_4 v^4 &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \alpha_1(2, 3, 4, 5) + \alpha_2(6, 7, 8, 9) + \alpha_3(8, 10, 12, 14) + \alpha_4(4, 6, 8, 10) &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned}$$

Al desarrollar e igualar coordenada a coordenada,

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 + 4\alpha_4 &= x_1 \\ 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + 10\alpha_3 + 6\alpha_4 &= x_2 \\ 4\alpha_1 + 8\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 &= x_3 \\ 5\alpha_1 + 9\alpha_2 + 14\alpha_3 + 10\alpha_4 &= x_4 \end{aligned}$$

Aquí las incógnitas son α_1, ..., α_4. La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 & x_1 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & x_2 \\ 4 & 8 & 12 & 8 & x_3 \\ 5 & 9 & 14 & 10 & x_3 \end{bmatrix}$$

Es necesario obtener la matriz escalonada reducida hasta la columna 4. El resultado es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -\frac{7}{4}x_1+\frac{3}{2}x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4}x_1-\frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1-2x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_1-3x_2+x_4 \end{bmatrix}$$

Si se hubiera hecho sin la escritura explícita de x_1, ..., x_4, se empieza con

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 14 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La escalonada reducida parcial hasta la columna 4 es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -7/4 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que el sistema inicial sea consistente se necesita que

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver este sistema homogéneo, buscando la matriz escalonada reducida, se obtiene

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 - 2x_4 \\ x_2 &= 2x_3 - x_4 \end{aligned}$$

O también

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los vectores de la forma anterior son los que están en el conjunto $\operatorname{gen}(v^1, v^2, v^3, v^4)$. $\diamond$

Para averiguar si v está en $\operatorname{gen}(v^1, v^2, ..., v^k)$ basta con averiguar si la ecuación

$$v = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_k v^k$$

tiene solución (las incógnitas son α_1, α_2, ..., α_k). Si tiene por lo menos una solución, entonces $v \in \operatorname{gen}(v^1, v^2, ..., v^k)$. Si no tiene solución, entonces $v \notin \operatorname{gen}(v^1, v^2, ..., v^k)$.

Ejemplo 4.24. Averiguar si $v = (1, 4, 7, 9)$ está en $\operatorname{gen}(\,(1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (5, 6, 7, 8)\,)$.

¿Es $(1, 4, 7, 9)$ combinación lineal de estos tres vectores?

$$\alpha_1(1, 2, 3, 4) + \alpha_2(1, 1, 1, 1) + \alpha_3(5, 6, 7, 8) = \ ?\ (1, 4, 7, 9).$$

La matriz aumentada del sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 7 & 7 \\ 4 & 1 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Un paso intermedio en la búsqueda de la solución puede ser,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

El sistema es inconsistente, es decir, $(1,4,7,9)$ no está en $\text{gen}(\,(1,2,3,4),(1,1,1,1),(5,6,7,8)\,)$. $\diamond$

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Asociados a esta matriz hay tres subespacios:

- N_A el espacio nulo de A, $N_A = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = 0\}$, subespacio de $\mathbb{R}^{n\times 1}$.
- El espacio generado por las columnas de A, llamado usualmente espacio columna de la matriz, $C_A = \text{gen}(\,A_{\star 1}, A_{\star 2}, ..., A_{\star n}\,)$, subespacio de $\mathbb{R}^{m\times 1}$. Este espacio es la imagen o recorrido de la siguiente función:

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ &f(x) = Ax \\ &C_A = f(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

- F_A , el espacio fila o espacio generado por las filas de A, subespacio de $\mathbb{R}^{1\times n}$.

Los más usados son los dos primeros, el espacio nulo y el espacio columna.

4.4 Independencia y dependencia lineal

Definición 4.2. Sea V un espacio vectorial, v^1, v^2, ..., v^m vectores (elementos) de V, $m \geq 1$. El conjunto $\mathcal{C} = \{v^1, v^2, ..., v^m\}$ es **linealmente independiente** (también se dice que los vectores v^1, v^2, ..., v^m son linealmente independientes) si la única combinación lineal igual al vector nulo es la combinación lineal trivial. Cuando hay una combinación lineal diferente de la trivial que sea igual al vector nulo, se dice que el conjunto es **linealmente dependiente**.

Al aplicar la definición para un ejemplo específico, se obtiene un sistema homogéneo, donde las incógnitas son los escalares de la combinación lineal. Si el sistema homogéneo tiene como única solución la trivial, entonces $\mathcal{C}$ es linealmente independediente. Si el sistema homogéneo tiene soluciones diferentes de la trivial, entonces $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente.

Sea A la matriz de coeficientes del sistema homogéneo y E su matriz escalonada reducida. Si E no tiene columnas libres, entonces los vectores son linealmente independientes. Si E tiene por lo menos una columna libre, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Ejemplo 4.25. Averiguar si los vectores $v^1 = (1,2,3)$ y $v^2 = (4,5,6)$ son linealmente independientes.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(4,5,6) &= (0,0,0)\\
(\alpha_1 + 4\alpha_2, 2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + 6\alpha_2) &= (0,0,0)\\
\alpha_1 + 4\alpha_2 &= 0\\
2\alpha_1 + 5\alpha_2 &= 0\\
3\alpha_1 + 6\alpha_2 &= 0\\
A &= \begin{bmatrix} 1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}\\
E &= \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como E no tiene columnas libres, la solución trivial es la única solución del sistema homogéneo y los dos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo 4.26. Averiguar si las matrices

$$A^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} -7 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix},$$

son linealmente independientes.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} -7 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
-\alpha_1 + 3\alpha_2 - 7\alpha_3 &= 0\\
4\alpha_2 - 4\alpha_3 &= 0\\
\alpha_1 + 5\alpha_2 - \alpha_3 &= 0\\
2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0\\
A &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -7\\ 0 & 4 & -4\\ 1 & 5 & -1\\ 2 & 6 & 2\end{bmatrix}\\
E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como E tiene una columna libre (la tercera), entonces las tres matrices son linealmente dependientes. Hasta acá ya está la respuesta al ejercicio propuesto. Se puede comprobar que una solución no trivial es $\alpha_1 = -4$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$. Fácilmente se verifica que $-4A^1 + A^2 + A^3 = 0$.

Ejemplo 4.27. Averiguar si los polinomios

$$p_1(x) = x^2 - 4, \quad p_2(x) = x - 2, \quad p_3(x) = x + 2,$$

son linealmente independientes.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(x^2-4)+\alpha_2(x-2)+\alpha_3(x+2)&=0\\
\alpha_1x^2+(\alpha_2+\alpha_3)x-4\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3&=0\\
\alpha_1&=0\\
\alpha_2+\alpha_3&=0\\
-4\alpha_1-2\alpha_2+2\alpha_3&=0\\
A&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\-4&-2&2\end{bmatrix}\\
E&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como E no tiene columnas libres, entonces los tres polinomios son linealmente independientes.

- ⋆ Si en un conjunto está el vector nulo, entonces es linealmente dependiente.
- ⋆ Un conjunto de un único vector no nulo es linealmente independiente.
- ⋆ Un conjunto de dos vectores no nulos es linealmente independiente si y solamente si uno de los vectores no es múltiplo del otro.
- ⋆ Un conjunto es linealmente dependiente si y solamente si alguno de sus vectores es combinación lineal de los otros.

4.5 Bases y dimensión

Definición 4.3. Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{B}=\{v^1,...,v^m\}\subseteq V$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una **base** de V si $\mathcal{B}$ es linealmente independientemente y genera todo V.

Ejemplo 4.28. $\mathcal{B}=\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, es la **base canónica** de $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{B}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, la base canónica.

$\mathcal{B}=\{(1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, la base canónica y se denotará por $\mathcal{B}_c$.

Ejemplo 4.29. $\mathcal{B}=\{(1,2),(3,4)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{B}=\{(1,2),(3,4),(5,6)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{B}=\{(1,2),(3,6)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$.
$\mathcal{B}=\{(1,2)\}$ no es una base de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 4.30. El conjunto de matrices

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Ejemplo 4.31. Los polinomios

$$p_1(x)=1,\quad p_2(x)=x,\quad p_3(x)=x^2$$

forman la base canónica de $\mathcal{P}_2$, conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos.

Ejemplo 4.32. Los polinomios

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad ..., \quad p_{n+1}(x) = x^n, \quad ...$$

forman la base canónica del conjunto de todos los polinomios.

Teorema 4.5. *Si un espacio vectorial tiene una base finita, entonces cualquier base tiene el mismo número de elementos.*

✓ El número de vectores de una base finita de un espacio vectorial es la **dimensión** del espacio vectorial. Se denotará por $\dim(V)$. Para el espacio cuyo único elemento es el vector 0, la dimensión es 0.

Ejemplo 4.33. $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$, $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$, $\dim(\mathcal{P}_3) = 4$.

⋆ Sea $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, ..., v^m\} \subseteq V$ espacio vectorial de dimensión n. Si $m = n$ y $\mathcal{B}$ es linealmente independiente, entonces $\mathcal{B}$ genera a V y es base de V.

⋆ Sea $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, ..., v^m\} \subseteq V$ espacio vectorial de dimensión n. Si $m = n$ y $\mathcal{B}$ genera a V, entonces $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y es base de V.

⋆ Sea $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, ..., v^m\} \subseteq V$ espacio vectorial de dimensión n. Si $m > n$, entonces $\mathcal{B}$ es linealmente dependiente.

⋆ Sea $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, ..., v^m\} \subseteq V$ espacio vectorial de dimensión n. Si $m < n$, entonces $\mathcal{B}$ no genera a V.

4.5.1 Base del espacio generado

Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{C} = \{u^1, u^2, ..., u^k\} \subseteq V$ y $U = \text{gen}(u^1, u^2, ..., u^k)$. Entonces

$$\dim(U) \leq k.$$

Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente, entonces $\dim(U) = k$ y $\mathcal{C}$ es base de U.

Si $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente, entonces $\dim(U) < k$ y $\mathcal{C}$ no es base de U. Hay que buscar un subconjunto de $\mathcal{C}$, del mayor tamaño posible que sea linealmente independiente. Este conjunto será base y su cantidad de elementos será la dimensión de U. Cualquier otro subconjunto de $\mathcal{C}$, linealmente independiente con esa misma cantidad de elementos será también base.

A modo de ejemplo, supongamos de $k = 4$. Si $\mathcal{C}$ es linealmente independiente, entonces $\dim(U) = 4$ y $\mathcal{C}$ es una base de U.

Si $\mathcal{C}$ es linealmente dependiente, es necesario considerar los subconjuntos con 3 elementos. Si alguno de ellos es linealmente independiente, este conjunto es una base y $\dim(U) = 3$. Fin de la búsqueda.

Si todos los subconjunto de 3 elementos son linealmente dependientes, entonces $\dim(U) < 3$ y es necesario considerar los subconjuntos de 2 elementos. Así sucesivamente hasta obtener la diemensión y una base.

El proceso descrito anteriormente puede ser rápido en algunos casos, pero en muchos casos puede ser muy dispendioso. Un proceso más general está en la siguiente sección.

4.5.2 Base del espacio nulo, del espacio columna y del espacio fila de una matriz

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y E su matriz escalonada reducida. Para obtener la dimensión de N_A y una base es necesario resolver el sistema homogéneo $Ax = 0$. Este sistema es equivalente a $Ex = 0$.

$$\dim(N_A) = \text{número de columnas libres de } E.$$

Para obtener una base de N_A, se obtiene la forma general de la solución, es decir, se expresan todas las variables, básicas y libres, en función de las variables libres. A la primera variable libre se le asigna el valor 1 y a las otras variables libres se les asigna 0 y se obtiene un x solución de $Ex = 0$. El vector x obtenido hace parte de una base.

En seguida se asigna el valor 1 a la segunda variable libre y 0 a las otras variables libres. El vector x obtenido hace parte de la base que se está construyendo y así sucesivamente. Al final de este proceso se tiene una base de N_A.

Ejemplo 4.34. Hallar la dimensión y una base del espacio nulo de A,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Su matriz escalonada reducida es

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como hay tres variables libres, x_1, x_3 y x_5, entonces $\dim(N_A) = 3$. La forma general de la solución de $Ex = 0$ es:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= -2x_3 + 3x_5 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -4x_5 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{matrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 0 \end{matrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_5 = 1 \end{matrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Estos tres vectores forman una base de N_A.

Ejemplo 4.35. Hallar la dimensión y una base del espacio nulo de A,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es cuadrada, $\det(A) = 27$, luego $E = I_3$. Entonces $\dim(N_A) = 0$, $N_A = \{(0, 0, 0)\}$.

Para obtener la dimensión y una base del espacio generado por las columnas de una matriz A, se podría seguir el proceso presentado en la sección anterior.

Un procedimiento, generalmente, más eficiente es el siguiente. Se obtiene E la matriz escalonada reducida de A.

$$\begin{aligned}\dim(C_A) &= \text{número de filas no nulas de } E\\ &= \text{número de columnas básicas de } E\\ &= \text{rango}(A) = \text{rango}(E)\end{aligned}$$

Sea $r = \text{rango}(A)$. Para escoger de manera segura y rápida r columnas de A linealmente independientes, basta con tomar las columnas de A correspondientes a las columnas básicas en E.

Ejemplo 4.36. Hallar la dimensión y una base de C_A, espacio generado por las columnas de A,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 12\\ 0 & 2 & 4 & 0 & -6\\ 0 & 5 & 10 & 6 & 9\end{bmatrix}.$$

Su matriz escalonada reducida es

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Entonces $\dim(C_A) = 2$. Una base de C_A está formada por las columnas

$$\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix}. \quad \diamond$$

Para obtener una base del espacio fila de A, generalmente el camino más rápido también comienza con la obtención de la matriz escalonada reducida de A.

$$\begin{aligned}\dim(F_A) &= \dim(C_A)\\ &= \text{número de filas no nulas de } E\\ &= \text{número de columnas básicas de } E\\ &= \text{rango}(A) = \text{rango}(E)\end{aligned}$$

Las filas no nulas de E forman una base de F_A. Para la matriz A del ejemplo anterior, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & -3\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}$ forman una base de F_A.

En algunos casos cuando se conoce $r = \text{rango}(A)$ y A tiene una estructura especial, puede ser más rápido, encontrar un subconjunto de r filas de A linealmente independientes.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Algunas veces es necesario saber si dos conjuntos de vectores $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ (ambos subconjuntos de V) generan el mismo subespacio. Un proceso natural, no necesariamente el más eficiente, consiste en tomar cada vector de $\mathcal{C}_1$ y averiguar si está en $\text{gen}(\mathcal{C}_2)$ y de igual forma tomar cada vector de $\mathcal{C}_2$ y averiguar si está en $\text{gen}(\mathcal{C}_1)$. Si en todos los casos la respuesta es afirmativa, entonces $\text{gen}(\mathcal{C}_1) = \text{gen}(\mathcal{C}_2)$.

Otra manera, equivalente a la anterior y algunas veces más eficiente, consiste en escoger $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{C}_1$ base de $\text{gen}(\mathcal{C}_1)$ y $\mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{C}_2$ base de $\text{gen}(\mathcal{C}_2)$. Si el número de elementos de $\mathcal{B}_1$ es diferente del número de elementos de $\mathcal{B}_2$, entonces $\text{gen}(\mathcal{B}_1) = \text{gen}(\mathcal{C}_1) \neq \text{gen}(\mathcal{B}_2) = \text{gen}(\mathcal{C}_2)$. Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ tienen igual número de elementos, basta con verificar si cada elemento de $\mathcal{B}_1$ es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_2$. No es necesario verificar si cada elemento de $\mathcal{B}_2$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}_1$.

Ejemplo 4.37. Sean $\mathcal{C}_1 = \{(4,3,6,5),(0,2,2,4),(3,4,5,6)\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{(1,2,3,4),(1,1,1,1),(1,0,1,0)\}$. Averiguar si $\text{gen}(\mathcal{C}_1) = \text{gen}(\mathcal{C}_2)$.

Como los dos conjuntos son linealmente independientes, entonces $\mathcal{C}_1$ es base de $\text{gen}(\mathcal{C}_1)$ y $\mathcal{C}_2$ es base de $\text{gen}(\mathcal{C}_2)$. Después de algunas operaciones, se constata que cada elemento de $\mathcal{C}_1$ es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{C}_2$. Luego $\text{gen}(\mathcal{C}_1) = \text{gen}(\mathcal{C}_2)$. $\diamond$

Ejemplo 4.38. Sean $\mathcal{C}_1 = \{(-10,-15,-20,-25),(-6,-12,-14,-20),(-7,-7,-11,10)\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{(-7,-9,-13,-15),(-1,-1,-3,-3),(-4,-3,-6,-5)\}$. Averiguar si $\text{gen}(\mathcal{C}_1) = \text{gen}(\mathcal{C}_2)$.

En este ejemplo también los dos conjuntos son linealmente independientes y son base de sus generados. El tercer vector de $\mathcal{C}_1$ no es combinación lineal de los vectores de $\mathcal{C}_2$, luego los subespacios generados son diferentes. $\diamond$

4.6 Coordenadas y matriz para cambio de base

⋆ Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\}$ una base de V. Si $v \in V$, entonces v se puede expresar de manera única como combinación lineal de v^1, ..., v^n.

✓ Sea V un espacio vectorial, $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\}$ una base de V, $v \in V$. Con los n escalares de la combinación lineal se construye un vector de $\mathbb{R}^n$ llamado el **vector de coordenadas** de v con respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$v = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2 + \cdots + \alpha_n v^n$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Aunque una base se definió simplemente como un conjunto de vectores con dos propiedades, para la definición de coordenadas con respecto a una base, es indispensable tener en cuenta un orden determinado en la base. Al cambiar el orden de los elementos de la base el conjunto no cambia pero la base si cambia para la consideración de las coordenadas. Entonces cuando se requiera tener en cuenta el orden se habla de **base ordenada**.

Ejemplo 4.39. Sea $v = (-9,0,-11)$, $\mathcal{B}_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(1,2,3),(-1,0,1),(2,1,5)\}$.

Obviamente

$$[v]_{\mathcal{B}_c} = (-9,0,-11)$$

Para hallar las coordenadas de v con respecto a $\mathcal{B}_1$ es necesario resolver un sistema de ecuaciones proveniente de la igualdad

$$\alpha_1(1,2,3) + \alpha_2(-1,0,1) + \alpha_3(2,1,5) = (-9,0,-11)$$

Al resolverlo se obtiene

$$[v]_{\mathcal{B}_1} = (2,3,-4)$$

⋆ Para el caso de $\mathbb{R}^n$, si $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\}$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix}^{-1} v \tag{4.29}$$

Ejemplo 4.40. Hallar las coordenadas de $v = (-9, 0, -11)$ y de $w = (3, 2, 1)$ con respecto a $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (-1, 0, 1), (2, 1, 5)\}$.

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/10 & 7/10 & -1/10 \\ -7/10 & -1/10 & 3/10 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$[w]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1/10 & 7/10 & -1/10 \\ -7/10 & -1/10 & 3/10 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4.41. Halle las coordenadas de A con respecto a la base $\mathcal{B}$ en el espacio de las matrices triangulares superiores 2×2, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3 \\ \alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_3 &= 4 \end{aligned}$$

Al resolverlo se obtiene

$$[A]_{\mathcal{B}} = (2, -3, 4).$$

✓ Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de V. La matriz A tal que

$$A[v]_{\mathcal{B}_1} = [v]_{\mathcal{B}_2} \tag{4.30}$$

para cualquier $v \in V$ se llama la **matriz de cambio de base** (o de transición) de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. En palabras, al multiplicar A por las coordenadas de un vector cualquiera v con respecto a $\mathcal{B}_1$ se obtienen las coordenadas de v con respecto a $\mathcal{B}_2$. Usualmente se denota por

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \tag{4.31}$$

⋆ Sean las bases $\mathcal{B}_1 = \{v^1, ..., v^n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w^1, ..., w^n\}$. Las columnas de $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ son las coordenadas de los v^j con respecto a $\mathcal{B}_2$,

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} [v^1]_{\mathcal{B}_2} & [v^2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & [v^n]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

⋆ En el otro sentido

$$M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} [w^1]_{\mathcal{B}_1} & [w^2]_{\mathcal{B}_1} & \cdots & [w^n]_{\mathcal{B}_1} \end{bmatrix} = (M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2})^{-1} \tag{4.33}$$

⋆ Si $\mathcal{B}_3$ es otra base,

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_3} = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_3} M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}\,. \tag{4.34}$$

⋆ En $\mathbb{R}^n$, sean $\mathcal{B}_c$ la base canónica y $\mathcal{B}_1 = \{v^1, ..., v^n\}$ otra base. Entonces las matrices que permiten pasar de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ y de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_1$ son:

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

$$M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_1} = (M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_c})^{-1} = \begin{bmatrix} [v^1]_{\mathcal{B}_c} & [v^2]_{\mathcal{B}_c} & \cdots & [v^n]_{\mathcal{B}_c} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix}^{-1} \tag{4.36}$$

⋆ En $\mathbb{R}^n$, sean las bases $\mathcal{B}_1 = \{v^1, ..., v^n\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{w^1, ..., w^n\}$. Usando (4.34),

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_2} M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_c} \tag{4.37}$$

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} w^1 & w^2 & \cdots & w^n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

La igualdad (4.37) dice simplemente: para pasar de las coordenadas con respecto a $\mathcal{B}_1$ a las coordenadas con respecto a $\mathcal{B}_2$, primero se pasa de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_c$ usando $M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_c}$ (matriz a la derecha) y después, se pasa de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}_2$ usando $M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_2}$ (producto por la izquierda).

Ejemplo 4.42. Obtener la matriz para cambiar de base, de $\mathcal{B}_1$ a B_2, donde

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 2, 3), (-1, 0, 1), (2, 1, 5)\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

$$M_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para una pequeña verificación, sea $v = (-9, 0, -11)$. Al calcular las coordenadas con respecto a las dos bases, $[v]_{\mathcal{B}_1} = (2, 3, -4)$ y $[v]_{\mathcal{B}_2} = (-20, 11, 9)$. Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

4.7 Ejercicios

1. Considere la función redondeo, que a un número real le asigna el entero más cercano. En caso de empate y de un número positivo, se le asigna el entero superior. Con empate y número negativo, se le asigna el entero inferior.

$$\begin{aligned} r(3.8) &= 4 \\ r(3.2) &= 3 \\ r(3) &= 3 \\ r(3.5) &= 4 \\ r(-3.5) &= -4 \end{aligned}$$

Considere $\mathbb{Z}^2$ con las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ \alpha x = \alpha(x_1, x_2) &= (\, r(\alpha x_1), r(\alpha x_2)\,) \end{aligned}$$

Por ejemplo: $\quad 0.5(4, 7) = (r(2),\, r(3.5)) = (2, 4)$.

¿Este conjunto con estas dos operaciones es un espacio vectorial?

2. Considere $V = \mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ con las siguientes operaciones para $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$x \oplus y = xy$$
$$\alpha \odot x = x^{\alpha}$$

¿Este conjunto con estas dos operaciones es un espacio vectorial?

3. En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ diga cuales conjuntos son subespacios. Cuando no sea un subespacio, dé un contraejemplo.

    (a) Las matrices simétricas
    (b) Las matrices triangulares superiores
    (c) Las matrices triangulares inferiores
    (d) Las matrices diagonales
    (e) Las matrices invertibles
    (f) Las matrices no invertibles
    (g) Las matrices tales que $a_{11} + a_{22} = 0$
    (h) Las matrices tales que $|a_{11} + a_{22}| = 0$
    (i) Las matrices tales que $|a_{11}| + |a_{22}| = 0$
    (j) Las matrices tales que $a_{11}a_{22} = 0$

5

Producto interno, norma

5.1 Producto interno

Definición 5.1. En un espacio vectorial[1] V, un **producto interno** o **producto interior** o **producto escalar**[2] o **producto punto** es una operación que a cuaquier pareja de vectores asigna un número y que cumple ciertas propiedades:

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} && \text{para todo } x, y \in V, && (5.1)\\
&\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle && \text{para todo } x, y \in V, && (5.2)\\
&\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle && \text{para todo } x, y, z \in V, && (5.3)\\
&\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle && \text{para todo } x, y \in V \;\text{ y para todo } \alpha \in \mathbb{R}, && (5.4)\\
&\langle x, x\rangle \geq 0 && \text{para todo } x \in V, && (5.5)\\
&\langle x, x\rangle = 0 && \text{si y solamente si } x = 0. && (5.6)
\end{aligned}$$

En este documento, para el producto interno, se utilizará la notación $\langle x, y\rangle$ o algunas veces $x \cdot y$, de uso frecuente en $\mathbb{R}^n$ (por eso se le llama algunas veces producto punto). Así, las propiedades se escriben:

$$\begin{aligned}
&x{\cdot}y \in \mathbb{R},\\
&x{\cdot}y = y{\cdot}x,\\
&(x+z){\cdot}y = (x{\cdot}y) + (z{\cdot}y) = x{\cdot}y + z{\cdot}y,\\
&(\alpha x){\cdot}y = \alpha(x{\cdot}y) = \alpha\ x{\cdot}y,\\
&x{\cdot}x \geq 0,\\
&x{\cdot}x = 0, \quad \text{si y solamente si } x = 0.
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1. En $\mathbb{R}^2$, $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ es un producto interno. En $\mathbb{R}^n$,

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \tag{5.7}$$

es un producto interno, es el **producto interno canónico** de $\mathbb{R}^n$.

$$\langle(1, 2, 3), (2, 0, -1)\rangle = 1 \times 2 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) = -1.$$

[1] En este documento se trata de espacios vectoriales reales.

[2] No confundir con producto por escalar.

Ejemplo 5.2. En $\mathbb{R}^2$,

$$\langle x, y\rangle = 4x_1y_1 + 5x_2y_2$$

también es un producto interno.

Ejemplo 5.3. En el $\mathbb{R}^{m\times n}$,

$$\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B) = \operatorname{tr}(AB^{\mathrm{T}}) \tag{5.8}$$

es un producto interno, es el **producto interno canónico** de $\mathbb{R}^{m\times n}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A^{\mathrm{T}}B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5\\ -1 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

$$\langle A, B\rangle = 7\,.$$

Mientras no se diga lo contario, si $V = \mathbb{R}^n$ o si $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, se supone que el producto interno es el producto interno canónico.

El producto interno canónico (5.8) se puede ver simplemente como el producto interno canónico de dos vectores en $\mathbb{R}^{mn}$ formados con las filas (o con las columnas) de las dos matrices. En el ejemplo anterior

$$\langle A, B\rangle = \langle\, (1, 2, 3, 4, 5, 6)\,,\, (2, 0, 1, -1, 0, 1)\,\rangle = 7.$$

Ejemplo 5.4. Sea $V = C_{[a,b]}$ el conjunto de funciones continuas en el intervalo $[a, b]$,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \tag{5.9}$$

es un producto interno, es el producto interno canónico de $C_{[a,b]}$.

Ejemplo 5.5. Sea $V = \mathcal{P}_2$, el conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$. Sean $t_0 < t_1 < t_2$ tres números reales fijos. Los siguientes son algunos ejemplos de producto interior:

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2\,, \tag{5.10}$$

$$\langle p, q\rangle = \int_7^9 p(x)q(x)dx\,, \tag{5.11}$$

$$\langle p, q\rangle = p(t_0)q(t_0) + p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) \tag{5.12}$$

Teorema 5.1. ***Teorema de Cauchy-Schwarz***. *Sea V un espacio vectorial, $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno, entonces*

$$\langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle\,. \tag{5.13}$$

Algunas veces se llama teorema de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky.

⋆ Sean $x \neq 0$, $y \neq 0$,

$$\frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} \le 1$$

$$-1 \le \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}} \le 1 \tag{5.14}$$

✓ La anterior desigualdad permite definir el coseno del ángulo θ entre dos vectores no nulos,

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle}} \tag{5.15}$$

Esta definición, para vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, coincide exactamente con el significado geométrico. Para otros espacios, es simplemente la generalización.

✓ Dos vectores x, y, son **perpendiculares** u **ortogonales** si

$$\langle x, y\rangle = 0\,. \tag{5.16}$$

De nuevo, esta definición, para vectores de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, coincide exactamente con el significado geométrico. Para otros espacios, es simplemente la generalización.

Ejemplo 5.6. Sean $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$, $z = (-2, 6)$, θ el ángulo entre x y y.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{11}{\sqrt{10 \times 29}} = 0.6459422\\ \theta &= 0.8685394 \text{ rad } = 49.76^{\circ}\\ \langle x, z\rangle &= 0, \text{ luego } x \text{ y } z \text{ son perpendiculares.}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.7. Averiguar si A y B son ortogonales, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -9 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}\begin{bmatrix} -6 & 4\\ -14 & 6\end{bmatrix} = 0$$

Luego A y B son ortogonales.

Ejemplo 5.8. Hallar la medida de los ángulos del triángulo con vértices $A = (1, 2)$, $B = (2, 5)$ y $C = (6, 4)$.

$$\begin{aligned}u &= B - A = (1, 3)\\ v &= C - A = (5, 2)\\ \cos\theta_A &= \langle u, v\rangle/\sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}\\ \cos\theta_A &= 11/\sqrt{10 \times 29} = 0.645942\\ \theta_A &= 49.76^{\circ}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u &= A - B = (-1, -3)\\ v &= C - B = (4, -1)\\ \cos\theta_B &= \langle u, v\rangle/\sqrt{\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle}\\ \cos\theta_B &= -1/\sqrt{10 \times 17} = -0.076696\\ \theta_B &= 94.40^{\circ}\\ \theta_C &= 35.84^{\circ}\end{aligned}$$

5.2 Norma

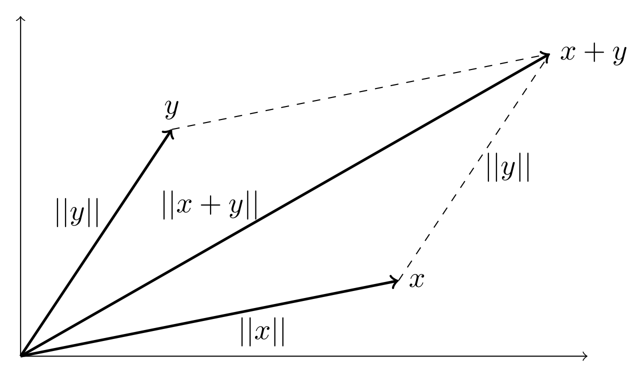
Definición 5.2. En un espacio vectorial V, una **norma** es una función ν que a cada vector asigna un número real, con las siguiente propiedades:

$$\nu(x) \in \mathbb{R} \qquad \text{para todo } x \in V, \tag{5.17}$$
$$\nu(x) \geq 0 \qquad \text{para todo } x \in V, \tag{5.18}$$
$$\nu(x) = 0 \qquad \text{si y solamente si } x = 0, \tag{5.19}$$
$$\nu(\alpha x) = |\alpha|\nu(x) \qquad \text{para todo } x \in V \text{ y para todo } \alpha \in \mathbb{R}, \tag{5.20}$$
$$\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \qquad \text{para todo } x, y \in V. \tag{5.21}$$

Una norma corresponde a una manera de medir el **tamaño** o **magnitud** de un vector. En un espacio vectorial puede haber varias normas. Para una norma es más frecuente la notación $|| \ \ ||$ (análogo a valor absoluto que es una norma en $\mathbb{R}$). Así las propiedades son:

$$||x|| \in \mathbb{R}, \tag{5.22}$$
$$||x|| \geq 0, \tag{5.23}$$
$$||x|| = 0 \text{ si y solamente si } x = 0, \tag{5.24}$$
$$||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||, \tag{5.25}$$
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{5.26}$$

La propiedad (5.21) o (5.26) se conoce como **desigualdad triangular** ya que en un triángulo la longitud de un lado siempre es menor o igual a la suma de las otras dos.



Teorema 5.2. *Sea V un espacio vectorial y $\langle \ , \ \rangle$ un producto interno. Entonces*

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{5.27}$$

es una norma.

✓ En $\mathbb{R}^n$, con el producto interno canónico, la norma obtenida

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \tag{5.28}$$

se llama la **norma euclidiana**. Mientras no se diga que se trata de otra norma, se supone que $|| \ \ ||$ es la norma euclidiana. Esta norma, en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, corresponde exactamente a la distancia entre el origen y el punto x.

✓ En $\mathbb{R}^n$, sea $p \geq 1$. La siguiente es la **norma de Hölder** de orden p:

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{5.29}$$

✓ Los casos más usuales son $p = 1$, $p = 2$ (la norma euclidiana) y el límite cuando $p \to \infty$:

$$\begin{aligned} ||x||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i| \,, \\ ||x|| = ||x||_2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \,, \\ ||x||_{\max} = ||x||_\infty &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i| \,. \end{aligned}$$

En Scilab, `norm(x,1)`, `norm(x)`, `norm(x,'inf')` o, por ejemplo, `norm(x,5)` para la norma de Hölder de orden 5.

✓ En $\mathbb{R}^{m\times n}$ la utilización de (5.8) y (5.27) da lugar a la norma de Frobenius

$$||A||_F = \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}A)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \,. \tag{5.30}$$

En Scilab, `norm(A,'fro')`. Para matrices hay otras normas más usadas, las normas matriciales generadas por las normas vectoriales, fuera del alcance de este resumen.

✓ En $\mathcal{P}_2$ la utilización de (5.10) y (5.27) da lugar a la norma

$$||p|| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$

donde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Ejemplo 5.9. Sean $x = (3, -4)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} ||x||_1 &= 7, \\ ||x|| = ||x||_2 &= 5, \\ ||x||_{\max} &= 4, \\ ||A||_F &= \sqrt{91} \,. \end{aligned}$$

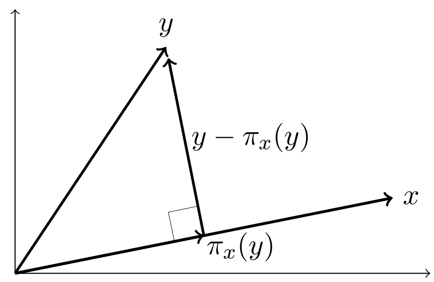
⋆ Con la utilización de la norma euclidiana, la desigualdad de Cauchy-Schwarz (5.13) y la definición de coseno (5.15) para vectores no nulos quedan así:

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y|| \tag{5.31}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \tag{5.32}$$

5.3 Proyección ortogonal

✓ Sean $x, y \in V$ espacio vectorial con producto interno, $x \neq 0$. La **proyección ortogonal** de y sobre x, denotada por $\pi_x(y)$, es un múltiplo de x tal que x y $y - \pi_x(y)$ son ortogonales.



$$
\begin{aligned}
\pi_x(y) &= tx \\
\langle x, y - tx \rangle &= 0 \\
\langle x, y \rangle - t\langle x, x \rangle &= 0 \\
t &= \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} \\
\pi_x(y) &= \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle}\, x = \frac{\langle x, y \rangle}{||x||^2}\, x
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Ejemplo 5.10. Sean $x = (5, 1)$, $y = (2, 3)$. Calcular $\pi_x(y)$ y $\pi_y(x)$.

$$
\begin{aligned}
\pi_x(y) &= \frac{13}{26}(5, 1) = (2.5,\ 0.5) \\
\pi_y(x) &= \frac{13}{13}(2, 3) = (2, 3)
\end{aligned}
$$

5.4 Bases ortogonales, ortonormales

✓ Sea V un espacio vectorial y $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\}$ una base. Se dice que $\mathcal{B}$ es una **base ortogonal** si

$$\langle v^i, v^j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \tag{5.34}$$

Si además,

$$||v^i|| = 1, \tag{5.35}$$

es decir,

$$\langle v^i, v^i \rangle = 1 \quad \text{para todo} \quad i, \tag{5.36}$$

se dice que es una **base ortonormal**.

⋆ Sea V un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v^1, ..., v^n\} \subseteq V$ en el que no está el vector nulo. Si

$$\langle v^i, v^j \rangle = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j\,,$$

entonces $\mathcal{B}$ es una base ortogonal.

Ejemplo 5.11. En $\mathbb{R}^n$, la base canónica es una base ortogonal y ortonormal. $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3), (1, 1, -1), (-5, 4, -1)\}$ es una base ortogonal. Al dividir cada vector por su norma se obtiene una base ortonormal:

$$\{\,(0.2673,\ 0.5345,\ 0.8018),\ (0.5774,\ 0.5774,\ -0.5774),\ (-0.7715,\ 0.6172,\ -0.1543)\,\}$$

5.4.1 Ortogonalización de Gram-Schmidt

Mediante este proceso se puede obtener a partir de un conjunto $\{v^1, ..., v^m\}$ linealmente independiente un conjunto $\{w^1, ..., w^m\}$ ortonormal ($\langle w^i, w^j\rangle = 0$ si $i \neq j$ y $\langle w^i, w^i\rangle = 1$) tal que

$$\begin{aligned} \text{gen}(v^1) &= \text{gen}(w^1) \\ \text{gen}(v^1, v^2) &= \text{gen}(w^1, w^2) \\ \text{gen}(v^1, v^2, ..., v^m) &= \text{gen}(w^1, w^2, ..., w^m) \end{aligned}$$

Hay dos enfoques, primero se ortogonaliza y después se normaliza, o bien, directamente se ortonormaliza.

$$y^1 = v^1 \tag{5.37}$$

$$y^2 = v^2 - \frac{\langle v^2, y^1\rangle}{\langle y^1, y^1\rangle}\, y^1 \tag{5.38}$$

$$y^3 = v^3 - \frac{\langle v^3, y^1\rangle}{\langle y^1, y^1\rangle}\, y^1 - \frac{\langle v^3, y^2\rangle}{\langle y^2, y^2\rangle}\, y^2 \tag{5.39}$$

$$y^4 = v^4 - \frac{\langle v^4, y^1\rangle}{\langle y^1, y^1\rangle}\, y^1 - \frac{\langle v^4, y^2\rangle}{\langle y^2, y^2\rangle}\, y^2 - \frac{\langle v^4, y^3\rangle}{\langle y^3, y^3\rangle}\, y^3 \tag{5.40}$$

$$\vdots$$

$$w^i = \frac{y^i}{||y^i||} \tag{5.41}$$

Ortonormalización directa:

$$y^1 = v^1 \tag{5.42}$$

$$w^1 = y^1/||y^1|| \tag{5.43}$$

$$y^2 = v^2 - \langle v^2, w^1\rangle\, w^1 \tag{5.44}$$

$$w^2 = y^2/||y^2|| \tag{5.45}$$

$$y^3 = v^3 - \langle v^3, w^1\rangle\, w^1 - \langle v^3, w^2\rangle\, w^2 \tag{5.46}$$

$$w^3 = y^3/||y^3|| \tag{5.47}$$

$$y^4 = v^4 - \langle v^4, w^1\rangle\, w^1 - \langle v^4, w^2\rangle\, w^2 - \langle v^4, w^3\rangle\, w^3 \tag{5.48}$$

$$w^4 = y^4/||y^4|| \tag{5.49}$$

$$\vdots$$

Ejemplo 5.12. Aplicar la ortogonalización de Gram-Schmidt a

$$\begin{aligned} v^1 &= (1, 1, 1, 1) \\ v^2 &= (1, 0, -1, 0) \\ v^3 &= (0, 1, 4, 0) \\ v^4 &= (-1, 0, 1, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= (1, 1, 1, 1) \\ y^2 &= (1, 0, -1, 0) \\ y^3 &= (0.75, -0.25, 0.75, -1.25) \\ y^4 &= (0.1818, -0.7273, 0.1818, 0.3636) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^1 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \\ w^2 &= (0.7071, 0, -0.7071, 0) \\ w^3 &= (0.4523, -0.1508, 0.4523, -0.7538) \\ w^4 &= (0.2132, -0.8528, 0.2132, 0.4264) \end{aligned}$$

Ortonormalización directa:

$$\begin{aligned} w^1 &= (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) \\ y^2 &= (1, 0, -1, 0) \\ w^2 &= (0.7071, 0, -0.7071, 0) \\ y^3 &= (0.75, -0.25, 0.75, -1.25) \\ w^3 &= (0.4523, -0.1508, 0.4523, -0.7538) \\ y^4 &= (0.1818, -0.7273, 0.1818, 0.3636) \\ w^4 &= (0.2132, -0.8528, 0.2132, 0.4264) \end{aligned}$$

5.5 Complemento ortogonal

✓ Sea V un espacio vectorial con producto interno, $\mathcal{C}$ un subconjunto no vacío de V. El **complemento ortogonal** de $\mathcal{C}$ es el conjunto de vectores de V ortogonales a los elementos de $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C}^\perp = \{v \in V : \langle v, x\rangle = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{C}\}. \tag{5.50}$$

⋆ Si $\mathcal{C} \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{C}^\perp$ es un subespacio vectorial de V.

⋆ $V^\perp = \{0\}\,, \qquad \{0\}^\perp = V\,, \qquad \left(\mathcal{C}^\perp\right)^\perp = \text{gen}(\mathcal{C})\,.$

⋆ Si W es un subespacio vectorial de V, entonces $(W^\perp)^\perp = W$.

⋆ Si V es de dimensión finita,

$$\dim\left(\text{gen}(\mathcal{C})\right) + \dim(\mathcal{C}^\perp) = \dim(V)\,. \tag{5.51}$$

⋆ Si W es un subespacio vectorial de V, entonces

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = \dim(V). \tag{5.52}$$

Ejemplo 5.13. Si $\mathcal{C} = \{(1, 2, 3)\}$, entonces $\mathcal{C}^\perp$ es el plano

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Ejemplo 5.14. Si $\mathcal{C}$ es la recta $\{t(1, 2, 3) : t \in \mathbb{R}\}$, entonces $\mathcal{C}^\perp$ es el plano

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0.$$

Ejemplo 5.15. Si $\mathcal{C} = \{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\perp &= \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \quad \text{y} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^{3\times 1} : \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0\}, \end{aligned}$$

es decir, es el espacio nulo de esa matriz. Al buscar la matriz escalonada reducida, la base del espacio nulo tiene un solo vector, $(1, -2, 1)$. Entonces $\mathcal{C}^\perp$ es la recta

$$\{t(1, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

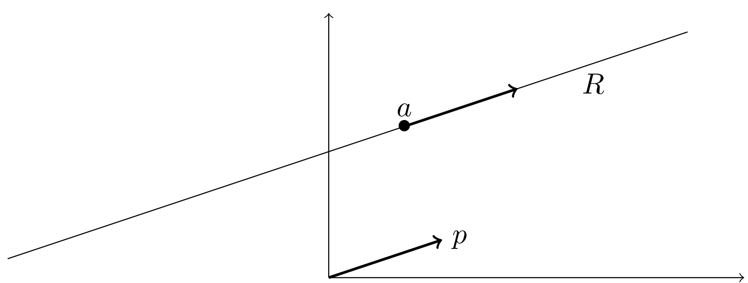
6

Rectas y planos

6.1 Rectas

✓ Sea V un espacio vectorial, por ejemplo $\mathbb{R}^n$, $a \in V$, $p \in V$, $p \neq 0$. La **recta** que pasa por a y es paralela al vector p, o la recta que pasa por a con vector director p, es el conjunto

$$R = \{a + tp : t \in \mathbb{R}\}. \tag{6.1}$$



Algunas veces no se escribe en notación de conjuntos y se dice simplemente la recta

$$a + tp\,,$$

sobreentendiéndose que es el conjunto de puntos de la forma anterior cuando t varía en los reales. Por ejemplo,

$$(2, 3) + t(2, 1)$$
$$(1, 0, -1) + s(2, 4, 0)$$
$$(1, 2, 4, 8) + \tau(2, -1, 1, 5)$$

Algunas veces se habla de las ecuaciones paramétricas de la recta, simplemente son n ecuaciones de la forma $x_i = a_i + p_i t$. Por ejemplo para la última recta,

$$x_1 = 1 + 2t$$
$$x_2 = 2 - t$$
$$x_3 = 4 + t$$
$$x_4 = 8 + 5t$$

Averiguar si un punto b está en la recta $a + tp$, se puede hacer de dos maneras. La primera es considerar el sistema de n ecuaciones $b = a + tp$ con una incógnita. El sistema tiene solución si y solamente si b está en la recta. La segunda consiste en averiguar si los vectores $b - a$ y p son paralelos.

Ejemplo 6.1. Averiguar si $b = (-5, 5, 1, -5)$ está en la recta $(1, 2, 4, 8) + \tau(2, -1, 1, 5)$.

El punto b no esta en la recta ya que el sistema

$$\begin{aligned} -5 &= 1 + 2t \\ 5 &= 2 - t \\ 1 &= 4 + t \\ -5 &= 8 + 5t \end{aligned}$$

no tiene solución. De otra forma $b - a = (-6, 3, -3, -13)$ no es paralelo a $(2, -1, 1, 5)$.

Dos rectas son paralelas si son paralelas a vectores paralelos. Dos rectas son iguales si son paralelas y tienen un punto común, en este caso todos los puntos son comunes.

6.2 Hiperplanos

✓ Dados $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, un **hiperplano** es el conjunto

$$H_{c,\alpha} = H = \{c \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}} x = \alpha\}. \tag{6.2}$$

En $\mathbb{R}^3$ un hiperplano es una plano, por ejemplo, $\{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -10\}$. En $\mathbb{R}^2$ un hiperplano es una recta, por ejemplo, $\{(x_1, x_2) : 5x_1 - 6x_2 = 1\}$. En $\mathbb{R}$ un hiperplano es un punto, por ejemplo, $\{x \in \mathbb{R} : 3x = 2\}$. El conjunto $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_5 = -10\}$ es un hiperplano de $\mathbb{R}^5$.

Por facilidad y mientras no haya confusión se habla del hiperplano dando simplemente la ecuación sin utilizar la notación de conjuntos. Así por ejemplo se habla del hiperplano $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_5 = -10$.

Si x y z son dos puntos de H, entonces

$$c^{\mathrm{T}}(x - z) = 0\,. \tag{6.3}$$

Por esto se dice que c es perpendicular al hiperplano H o que c es un vector normal a H.

✓ Dos hiperplanos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos.

Los hiperlanos $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5$ y $-3x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 12x_4 = 1$ son paralelos.

Otra manera de determinar un hiperplano es mediante n puntos x^1, x^2, ..., x^n que estén en él y tales que $x^2 - x^1$, $x^3 - x^1$, ..., $x^n - x^1$ sean linealmente independientes. Se requiere entonces encontrar un vector c no nulo y perpendicular a estos $n - 1$ vectores (las diferencias). Esto da como resultado un sistema homogéneo de $n - 1$ ecuaciones con n incógnitas. Cualquier solución no nula es un vector c.

Sean $y^2 = x^2 - x^1$, $y^3 = x^3 - x^1$, ..., $y^n = x^n - x^1$,

$$\begin{aligned} c^{\mathrm{T}} y^2 &= 0 \\ c^{\mathrm{T}} y^3 &= 0 \\ &\vdots \\ c^{\mathrm{T}} y^n &= 0 \end{aligned}$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} y_1^2 & y_2^2 & \cdots & y_n^2 \\ y_1^3 & y_2^3 & \cdots & y_n^3 \\ \vdots & & & \\ y_1^n & y_2^n & \cdots & y_n^n \end{bmatrix}$$

Una vez conocido c, se calcula el valor $\alpha = c^{\mathrm{T}} x^i$ con cualquier x^i (el resultado es el mismo).

Ejemplo 6.2. Determinar el hiperplano que pasa por los puntos $x^1 = (-2, -5, -2, -2)$, $x^2 = (0, -1, -2, -2)$, $x^3 = (-3, -5, -3, 1)$, $x^4 = (-3, -3, -2, -3)$.

$$\begin{aligned} y^2 &= (2, 4, 0, 0) \\ y^3 &= (-1, 0, -1, 3) \\ y^4 &= (-1, 2, 0, -1) \end{aligned}$$

Resolver el sistema $Ac = 0$, con

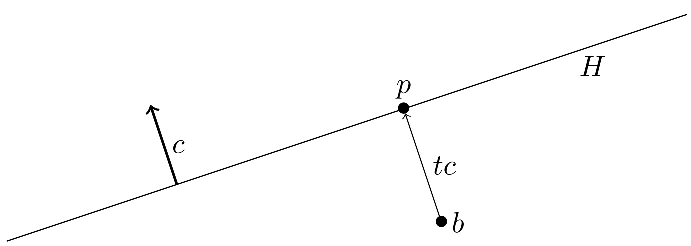
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Una solución es $c = (-1/2,\ 1/4,\ 7/2,\ 1)$. También sirve $c = (-2,\ 1,\ 14,\ 4)$. Así $\alpha = c^{\mathrm{T}} x^1 = -37$. El hiperplano es

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : -2x_1 + x_2 + 14x_3 + 4x_4 = -37\}.$$

6.3 Distancia de un punto a un hiperplano

Sea $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n : c^{\mathrm{T}} x = \alpha\}$ un hiperplano. Dado $b \in \mathbb{R}^n$ se puede encontrar la distancia de b a H y también p, el punto de H más cercano a b, también llamado la **proyección** de b sobre H.



Como c es ortogonal a H, se pusca p en H tal que:

$$\begin{aligned} p &= b + tc \\ c^{\mathrm{T}} p &= \alpha \\ c^{\mathrm{T}}(b + tc) &= \alpha \end{aligned}$$

Entonces,

$$t = \frac{\alpha - c^{\mathrm{T}} b}{c^{\mathrm{T}} c} \tag{6.4}$$

$$p = b + tc \tag{6.5}$$

$$\operatorname{dist}(b, H) = |t|\,||c|| = \frac{|\alpha - c^{\mathrm{T}} b|}{||c||} \tag{6.6}$$

Como una recta es un hiperplano de $\mathbb{R}^2$ y un plano es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$, las fórmulas anteriores se pueden aplicar para la distancia de un punto a una recta de $\mathbb{R}^2$ o para la distancia de un punto a un plano.

Ejemplo 6.3. Hallar la distancia del punto $(1, 2, 3, 4)$ al hiperplano $x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6$.

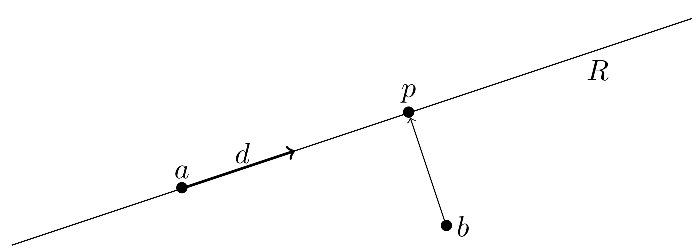
$$\begin{aligned} t &= \frac{6-(-7)}{15} = \frac{13}{15} \\ p &= (1,2,3,4) + \frac{13}{15}(1,-1,2,-3) = (28/15, 17/15, 71/15, 7/5) \\ \text{dist} &= ||b-p|| = 3.3565856 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.4. Hallar la distancia del punto $b = (4, -2)$ a la recta $2x_1 - 3x_2 = 5$, y el punto de la recta más cercano a b.

$$\begin{aligned} t &= \frac{5 - [2\ \ -3][4\ \ -2]^{\mathrm{T}}}{4+9} = -\frac{9}{13} \approx -0.69 \\ p &= (4,-2) - \frac{9}{13}(2,-3) = \left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right) \approx (2.62, 0.077) \\ \text{distancia} &= \frac{|-9|}{\sqrt{13}} \approx 2.5 \end{aligned}$$

6.4 Distancia de un punto a una recta de $\mathbb{R}^n$

Sea $a, d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $R = \{a + td : t \in \mathbb{R}\}$ una recta. Dado $b \in \mathbb{R}^n$ se puede encontrar la distancia de b a R y también p, el punto de R más cercano a b, también llamado la proyección de b sobre R.



$$\begin{aligned} p &= a + td \\ (p-b)^{\mathrm{T}} d &= 0 \qquad (6.7) \\ \big(a + td - b\big)^{\mathrm{T}} d &= 0 \\ t &= \frac{(b-a)^{\mathrm{T}} d}{d^{\mathrm{T}} d} \qquad (6.8) \\ p &= a + td \qquad (6.9) \\ \text{dist}(b, R) &= ||b-p|| \qquad (6.10) \end{aligned}$$

Ejemplo 6.5. Hallar la distancia entre el punto $b = (4, -2)$ a la recta $(1, -1) + t(6, 4)$.

$$\begin{aligned} b - a &= (3, -1) \\ t &= \frac{(3, -1) \cdot (6, 4)}{36 + 16} = \frac{7}{26} \\ p &= (1, -1) + \frac{7}{26}(6, 4) = \left(\frac{34}{13}, \frac{1}{13}\right) \\ \text{distancia} &= ||(4, -2) - (34/13, 1/13)|| = ||(18/13, -27/13))|| = \frac{\sqrt{1053}}{13} \approx 2.50 \end{aligned}$$

Obsérvese que la recta $2x_1 - 3x_2 = 5$ es la misma recta $(1, -1) + t(6, 4)$. Obviamente los resultados coinciden.

6.5 Distancia entre dos rectas de $\mathbb{R}^2$

Si las rectas no son paralelas, se cortan y su distancia es cero. Supongamos entonces que las dos rectas son paralelas.

Sean $R = \{u + tf : t \in \mathbb{R}\}$ y $S = \{v + sg : s \in \mathbb{R}\}$ las dos rectas tales que $f = kg$.

$$\operatorname{dist}(R, S) = \operatorname{dist}(v, R) = \operatorname{dist}(u, S) \tag{6.11}$$

Ejemplo 6.6. Hallar la distancia entre las rectas $R = \{(1, 2) + t(-3, 4) : t \in \mathbb{R}\}$ y $S = \{(3, 1) + \tau(6, -8) : \tau \in \mathbb{R}\}$.

Las dos rectas son paralelas. Para calcular $\operatorname{dist}(\,(1, 2), S\,)$:

$$\begin{aligned} b - a &= (-2, 1) \\ t &= -1/5 \\ p &= (9/5, 13/5) \\ \text{dist} &= 1 \end{aligned}$$

Para calcular $\operatorname{dist}(\,(3, 1), R\,)$:

$$\begin{aligned} b - a &= (2, -1) \\ t &= -2/5 \\ p &= (11/5, 2/5) \\ \text{dist} &= 1 \end{aligned}$$

6.6 Producto vectorial

Está definido únicamente en $\mathbb{R}^3$. También se llama producto cruz. Dados x, y en $\mathbb{R}^3$, el producto vectorial es un vector de $\mathbb{R}^3$,

$$x \times y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}, \quad \text{(es simplemente notación)}$$

donde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

$$x \times y = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

$$x \times y = \mathbf{i}(x_2y_3 - y_2x_3) - \mathbf{j}(x_1y_3 - y_1x_3) + \mathbf{k}(x_1y_2 - y_1x_2) \tag{6.13}$$

$$x \times y = (\, x_2y_3 - y_2x_3,\ -x_1y_3 + y_1x_3,\ x_1y_2 - y_1x_2\,) \tag{6.14}$$

Propiedades

$$u \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{6.15}$$

$$y \times x = -(x \times y) \tag{6.16}$$

$$(\alpha x) \times y = \alpha\,(x \times y) \tag{6.17}$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \tag{6.18}$$

$$x^{\mathrm{T}}(x \times y) = 0, \tag{6.19}$$

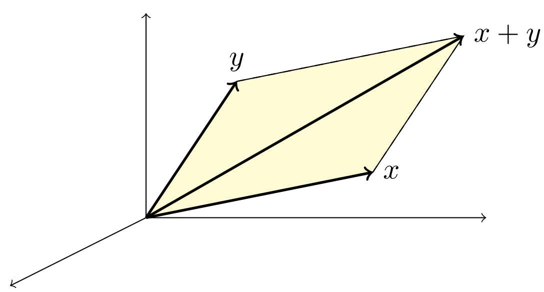
$$y^{\mathrm{T}}(x \times y) = 0, \quad \text{es decir, } x \times y \text{ es perpendicular a } x \text{ y a } y. \tag{6.20}$$

$$\text{Si}\ \ x \times y = \mathbf{0}, \quad \text{entonces } x \text{ es paralelo a } y \tag{6.21}$$

$$||x \times y|| = \text{área(paralelogramo}(0, x, y)) \tag{6.22}$$

$$\frac{1}{2}||x \times y|| = \text{área(triángulo}(0, x, y)) \tag{6.23}$$

donde paralelogramo$(0, x, y)$ es el paralelogramo determinado por 0, x y y, es decir, el paralelogramo de vértices 0, x, $x + y$ y y. Este resultado es análogo a (3.9), pero ahora x y y están en $\mathbb{R}^3$. Obviamente el paralelogramo está contenido en un plano de $\mathbb{R}^3$, el plano determinado por 0, x y y.



Ejemplo 6.7. $x = (1, 2, 3)$, $y = (2, -1, 1)$

$$\begin{aligned} x \times y &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{i}(2 - (-3)) - \mathbf{j}(1 - 6) + \mathbf{k}(-1 - 4) \\ &= 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \\ &= (5, 5, -5)\,. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.8. $x = (1, 2, 3)$, $y = (-2, -4, -6)$

$$\begin{aligned} x \times y &= \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{i}(-12 + 12) - \mathbf{j}(-6 + 6) + \mathbf{k}(-4 + 4) \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ &= (0, 0, 0)\,, \end{aligned}$$

luego x y y son paralelos.

6.6.1 Producto triple escalar o producto mixto

$$x \cdot (y \times z) = \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \tag{6.24}$$

Ejemplo 6.9.

$$\begin{aligned} (1,2,3) \cdot (\,(4,5,6) \times (7,8,0)\,) &= (1,2,3) \cdot (-48, 42, -3) = 27 \\ &= \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = 27 \end{aligned}$$

Propiedades

$$y \cdot (x \times z) = -x \cdot (y \times z) \tag{6.25}$$

$$x \cdot (y \times z) = y \cdot (z \times x) = z \cdot (x \times y) \tag{6.26}$$

$$|x \cdot (y \times z)| = \text{volumen}(\text{paralelepípedo}(0, x, y, z)) \tag{6.27}$$

El paralelepípedo determinado por 0, x, y y z es el paralelepípedo cuya tapa inferior tiene como vértices 0, x, $x+y$ y y. Los vértices de la tapa superior son: z, $x+z$, $x+y+z$ y $y+z$. Este resultado, (6.27), es exactamente el mismo (3.11).

6.7 Planos

Un plano es simplemente un hiperplano de $\mathbb{R}^3$. Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : c^{\mathrm{T}} x = \alpha\}. \tag{6.28}$$

Por ejemplo, si $c = (2, -3, 4)$ y $\alpha = 10$,

$$P = \{(x_1, x_2, x_3) : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10\}.$$

También, por facilidad, se habla del plano

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10$$

Si x, $y \in P$,

$$c^{\mathrm{T}}(x - y) = 0 \tag{6.29}$$

6.7.1 Plano determinado por el vector normal y un punto

Sea $c \in \mathbb{R}^3$, $c \neq 0$, el vector normal y a un punto del plano:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : c^{\mathrm{T}} x = c^{\mathrm{T}} a\}. \tag{6.30}$$

✓ Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos.

Ejemplo 6.10. Obtener el plano de vector normal $(2, -3, 4)$ que pasa por el punto $(1, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= (2, -3, 4) \cdot (1, 0, -1) \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$$

6.7.2 Plano determinado por tres puntos

Sean u, v, w tres puntos distintos no colineales (no están en la misma recta).

$$\begin{aligned} c &= (u - v) \times (u - w) \\ a &= \text{ uno de los tres puntos} \\ P &= \{x \in \mathbb{R}^3 : c^{\mathrm{T}} x = c^{\mathrm{T}} a\}. \end{aligned}$$

Si $c = 0$, entonces los tres puntos son colineales.

Ejemplo 6.11. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $u = (1, 2, 3)$, $v = (1, 1, 1)$, $w = (2, 4, -5)$.

$$\begin{aligned} u - v &= (0, 1, 2) \\ u - w &= (-1, -2, 8) \\ c = (u - v) \times (u - w) &= (12, -2, 1) \\ c \cdot u &= 11 \\ 12x_1 - 2x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

6.8 Distancia de un punto a un plano

Es un caso particular de la distancia de un punto a un hiperplano.

Si el plano es $P = \{(x_1, x_2, x_3) : c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = \alpha\}$ y $b = (b_1, b_2, b_3)$,

$$\operatorname{dist}(b, P) = \frac{|c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 - \alpha|}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} = \frac{|c \cdot b - \alpha|}{||c||} \tag{6.31}$$

$$t = \frac{\alpha - c_1 b_1 - c_2 b_2 - c_3 b_3}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} = \frac{\alpha - c \cdot b}{c \cdot c} \tag{6.32}$$

$$p = b + tc \quad \text{ punto del plano más cercano a } b. \tag{6.33}$$

Ejemplo 6.12. Hallar la distancia del punto $b = (-9, 6, 5)$ al plano $-2x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$.

$$\begin{aligned} \text{dist} &= \frac{|34 - (-2)|}{3} = 12 \\ t &= \frac{-2 - 34}{9} = -4 \\ p &= (-9, 6, 5) + (-4)(-2, 1, 2) = (-1, 2, -3)\,. \end{aligned}$$

6.9 Distancia entre dos rectas de $\mathbb{R}^3$

Sean $a, p, b, q \in \mathbb{R}^3$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ y las dos rectas

$$\begin{aligned} R &= \{a + tp : t \in \mathbb{R}\} \\ L &= \{b + sq : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

La distancia entre las dos rectas es

$$\operatorname{dist}(R, L) = \frac{|\,(a-b)\cdot(p \times q)\,|}{||p \times q||} \tag{6.34}$$

Ejemplo 6.13. Hallar la distancia entre las rectas $(-3, 9, 8) + t(3, -2, -2)$ y $(3, 2, 1) + t(-2, 1, 2)$.

$$\begin{aligned} a - b &= (-6, 7, 7) \\ p \times q &= (-2, -2, -1) \\ (a-b)\cdot(p \times q) &= -9 \\ ||p \times q|| &= 3 \\ \operatorname{dist} &= 3 \end{aligned}$$

6.10 Distancia entre dos rectas de $\mathbb{R}^n$

Sean $a, p, b, q \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ y las dos rectas

$$\begin{aligned} R &= \{a + tp : t \in \mathbb{R}\} \\ L &= \{b + sq : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Se buscan, x en R, y en L, tales que

$$\begin{aligned} &(x - y) \cdot p = 0, \\ &(x - y) \cdot q = 0, \\ &\operatorname{dist}(R, L) = ||x - y|| \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (a + tp - b - sq) \cdot p = 0 \\ (a + tp - b - sq) \cdot q = 0 \end{aligned}$$

Resolver el sistema 2×2, con incógnitas t y s

$$(p \cdot p)t - (p \cdot q)s = (b - a) \cdot p \tag{6.35}$$
$$(p \cdot q)t - (q \cdot q)s = (b - a) \cdot q \tag{6.36}$$

Construir

$$x = a + tp \tag{6.37}$$
$$y = b + sq \tag{6.38}$$
$$\operatorname{dist}(R, L) = ||x - y|| \tag{6.39}$$

Ejemplo 6.14. Hallar la distancia entre las rectas $(-1,0,-4,3)+t(4,2,2,2)$ y $(1,0,-1,0)+t(-4,-3,-3,-3)$

$$
\begin{aligned}
b-a &= (2,0,3,-3)\\
\begin{bmatrix} 28 & 34\\ -34 & -43\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\\ s\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 8\\ -8\end{bmatrix}\\
t &= 3/2\\
s &= -1\\
x &= (5,3,-1,6)\\
y &= (5,3,2,3)\\
\text{dist} &= 4.242641
\end{aligned}
$$

Ejemplo 6.15. Hallar por este método, la distancia entre las dos rectas de $\mathbb{R}^3$, del ejemplo 6.13: $(-3,9,8)+t(3,-2,-2)$ y $(3,2,1)+t(-2,1,2)$.

$$
\begin{aligned}
b-a &= (6,-7,-7)\\
\begin{bmatrix} 17 & 12\\ -12 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t\\ s\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 46\\ -33\end{bmatrix}\\
t &= 2\\
s &= 1\\
x &= (3,5,4)\\
y &= (1,3,3)\\
\text{dist} &= 3
\end{aligned}
$$

7

Funciones lineales

xscf

7.1 Definición y ejemplos

Definición 7.1. Sean U, V espacios vectoriales. Se dice que la función $f : U \to V$ es una **función lineal** o una **transformación lineal** si para todo x, y en U y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{7.1}$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x). \tag{7.2}$$

⋆ Si f es lineal, entonces

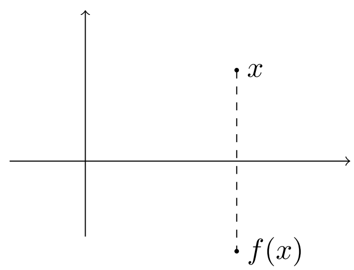
$$f(0) = 0. \tag{7.3}$$

Si $f(0) \neq 0$, entonces f no es lineal. Sin embargo, si $f(0) = 0$, f podría ser no lineal..

Ejemplo 7.1.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$, no es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4$, no es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, no es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 + 1$, no es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2$, es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, no es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (3x, -4x)$, es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (0, 0)$, es lineal.
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (3x + 1, -4x)$, no es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$, es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, es lineal.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2)$, no es lineal.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, es lineal.
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$, es lineal.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f(A) = A^{\mathrm{T}}$ es lineal.
Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f(A) = A^{\mathrm{T}}A$ no es lineal.
Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A + A^{\mathrm{T}}$ es lineal.
Sea $M \in \mathbb{R}^{p\times m}$ una matriz fija, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $f(A) = MA$ es lineal.
Sea $u \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ un vector fijo, la proyección de x sobre u (5.33), $\pi_u(x)$ es lineal.

Ejemplo 7.2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función que obtiene el punto simétrico con respecto al eje horizontal:

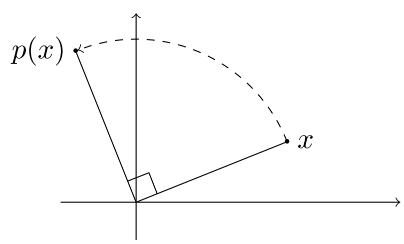


Esta función, $f(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$, es lineal.

La simetría con respecto al eje vertical, $g(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$, es lineal.

La simetría con respecto a la recta $x_2 = x_1$, también es lineal: $h(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$.

La rotación de un cuarto de vuelta ($\pi/2$ radianes o 90 grados) en el sentido antihorario,



$p(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$ es lineal.

La rotación de un ángulo θ en el sentido antihorario:

$$\begin{aligned} r(x_1, x_2) &= (\cos(\theta)x_1 - \operatorname{sen}(\theta)x_2, \operatorname{sen}(\theta)x_1 + \cos(\theta)x_2) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

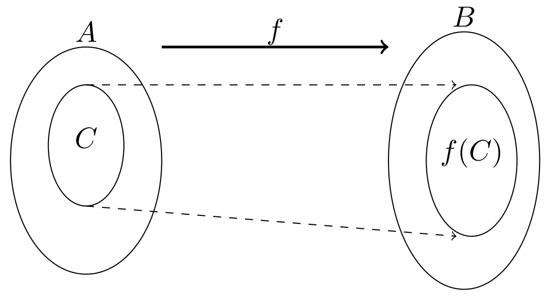
es lineal.

7.2 Algunas propiedades

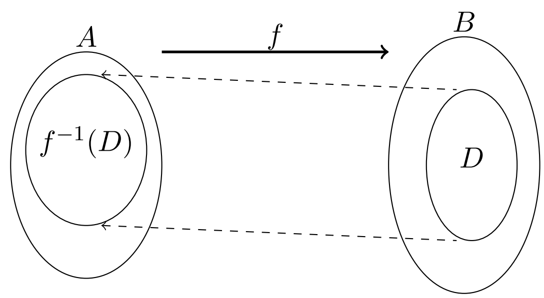
Sean A y B conjuntos, $f : A \to B$ una función cualquiera, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$.

✓ $f(C) = \{f(x) : x \in C\} \subseteq B$ es la **imagen** de C por f.

✓ $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ es la **imagen** o **recorrido** de la función f.



✓ $f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\} \subseteq A$ es la **imagen inversa** o **preimagen** de D.
Observación: $f(f^{-1}(D)) \subseteq D$ pero no es necesariamente igual a D. Análogamente, $C \subseteq f^{-1}(f(C))$.



⋆ Sean U, V espacios vectoriales, $f : U \to V$ lineal, U' subespacio vectorial de U, V' subespacio vectorial de V. Supóngase, cuando se requiera, que U y V son de dimensión finita. Entonces:

1. $f(U')$ es subespacio vectorial de V. En particular, $f(U)$ se llama el **espacio imagen** de f.
2. f está perfectamente determinada si se conoce $f(u^1)$, $f(u^2)$, ..., $f(u^n)$ para $\{u^1, ..., u^n\}$ una base de U.
3. $f^{-1}(V')$ es subespacio vectorial de U. En particular, $f^{-1}(0)$ se llama el **núcleo** o **kernel** de f.
4. $\dim(U') \geq \dim(f(U'))$.
5. Si $\mathcal{B}_1 = \{w^1, w^2, ..., w^k\}$ es una base de U', entonces $f(U') = \text{gen}(\, f(w^1), f(w^2), ..., f(w^k)\,)$.
6. f es uno a uno si y solamente si el núcleo es igual a $\{0\}$.
7. Si los vectores de U, $w^1, w^2, ..., w^k$ son linealmente independientes y f es uno a a uno, entonces $f(w^1), f(w^2), ..., f(w^k)$ son linealmente independientes.
8. Si $\mathcal{B}_1 = \{w^1, w^2, ..., w^k\}$ es una base de U' y f es uno a uno, entonces $\{\, f(w^1), f(w^2), ..., f(w^k)\,\}$ es una base de $f(U')$.
9. Sea $\mathcal{B}_1 = \{u^1, u^2, ..., u^n\}$ una base de U. Si $g : U \to V$ es otra otra función lineal y $g(u^i) = f(u^i)$ para $i = 1, ..., n$, entonces $g(x) = f(x)$ para todo $x \in U$, es decir, $f = g$ (es la misma propiedad 2., dicha de otra manera).
10. $$\dim(\,U\,) = \dim(\, f(U)\,) + \dim(\, f^{-1}(0)\,) \tag{7.4}$$

    En palabras, la dimensión del dominio (espacio de salida) es igual a la dimensión del espacio imagen más la dimensión del núcleo.

    La dimensión de la imagen de f se llama el **rango** de f. La dimensión del núcleo de f se llama la **nulidad** de f.

    $$\dim(\,U\,) = \text{rango}(f) + \text{nulidad}(f). \tag{7.5}$$

Dado U' subespacio de U, para encontrar $f(U')$ se puede aplicar el siguiente proceso: encontrar una base de U'; encontrar las imágenes de los elementos de esta base; hallar una base del espacio generado por estas imágenes.

Ejemplo 7.3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (7x_1 - 9x_2 + 4x_3, -6x_1 + 7x_2 - 3x_3, x_1 + 3x_2 - 2x_3)$, $U' = \text{gen}(\,(1,2,3),(1,1,1),(3,5,7)\,)$. Encontrar una base de $f(U')$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como las variables básicas son x_1 y x_2, entonces una base de U' es $\mathcal{B}_1 = \{(1,2,3),(1,1,1)\}$

$$f(1,2,3) = (1,-1,1)$$
$$f(1,1,1) = (2,-2,2)$$

$f(U') = \text{gen}((1,-1,1),\,(2,-2,2))$. Una base de $f(U')$ es $\{(1,-1,1)\}$. En este ejemplo, U' es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión dos, es decir, un plano que pasa por el origen. Su imagen es una recta que pasa por el origen. $\diamondsuit$

Dado V' subespacio de V, para encontrar $f^{-1}(V')$ se puede aplicar el siguiente proceso. Supongamos por facilidad que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por $f(x) = Ax$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz fija. Cuando $f : U \to V$ es lineal y U y V son otros espacios de dimensión finita, la representación matricial (siguiente sección) permite no perder generalidad al suponer que $f(x) = Ax$.

- Encontrar $B' = \{v^1, ..., v^k\}$ base de V'.
- Plantear el sistema de ecuaciones,

  $$Ax = \alpha_1 v^1 + \cdots + \alpha_k v^k,$$

  con variables x_1, ..., x_n, α_1, ..., α_k, es decir, el sistema homogéneo

  $$Ax - \alpha_1 v^1 - \cdots - \alpha_k v^k = 0.$$

  O sea, construir la matriz

  $$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & -v^1 & \cdots & -v^k \end{bmatrix}$$

- Calcular la matriz escalonada reducida.
- Obtener la solución general del sistema homogéneo, en función de las variables libres.
- Dar a las variables libres los valores $1, 0, ..., 0$, luego $0, 1, 0, ..., 0$, luego ... y finalmente $0, 0, ..., 0, 1$. Los vectores x obtenidos seran generadores de $f^{-1}(V')$.

Estos últimos tres pasos se pueden ver como: construir una base del espacio nulo de $\hat{A}$ y de estos vectores tomar únicamente las primeras n entradas. Como se trata del conjunto generado, la matriz $\hat{A}$ también se puede construir $\begin{bmatrix} A & v^1 & \cdots & v^k \end{bmatrix}$.

Ejemplo 7.4. Sea $V' = \text{gen}(\,(6,2,-8),(-3,-1,4),(-4,-8,10)\,)$. Hallar $f^{-1}(V')$ para la función $f(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Una base de V' es $\{v^1, v^2\} = \{(6,2,-8),(-4,-8,10)\}$. Es necesario resolver

$$Ax = \alpha_1 v^1 + \alpha_2 v^2$$

equivalente al sistema homogéneo

$$Ax - \alpha_1 v^1 - \alpha_2 v^2 = 0$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & -2 & -2 & 8 & -10 \end{bmatrix}$$

Su matriz escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución general es de la forma

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + 6\alpha_1 - 6\alpha_2 \\ x_2 &= -x_3 - 2\alpha_2 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= -2\alpha_1 - \alpha_2 \\ \alpha_1 &= \alpha_1 \\ \alpha_2 &= \alpha_2 \end{aligned}$$

Dando a las variables independientes, x_3, α_1, α_2, los valores $1,0,0, \quad 0,1,0 \quad \text{y} \quad 0,0,1$, se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces $f^{-1}(V') = \text{gen}(\,(-2,-1,1,0),(6,0,0,-2),(-6,-2,0,-1)\,)$.

Ejemplo 7.5. Sea $f(x) = Ax$, con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar $f^{-1}(\,\text{gen}(v^1)\,)$, con $v^1 = (1,2,3)$.

Siguiendo los mismos pasos:

$$[A \quad -v^1] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$E_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base de $f^{-1}(\,\mathrm{gen}(v^1)\,)$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En esta caso la variablle α_1 es básica y debe valer 0. Esto quiere decir que los únicos x tales que $Ax = \alpha_1 v^1$ son aquellos tales que $Ax = 0$. O sea, en este caso, $f^{-1}(\,\mathrm{gen}(v^1)\,) = N_A$.

Ejemplo 7.6. Para la misma función del ejemplo anterior, hallar $f^{-1}(\,\mathrm{gen}(v^2)\,)$, con $v^2 = (1, 1, 1)$.

$$[A \quad -v^2] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{\hat{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una base de $f^{-1}(\,\mathrm{gen}(v^2)\,)$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

7.3 Representación matricial

- Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es lineal, entonces existe una única matriz de m filas y n columnas, denotada A_f o $[f]$, tal que

$$f(x) = [f]\, x \tag{7.6}$$

  Esta matriz es la matriz de la función lineal f o la matriz asociada a la función lineal f.

Ejemplo 7.7. Si $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2, -2x_1)$, entonces

$$A_f = [f] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

puesto que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$$

✓ Sea $\mathcal{B}_1 = \{u^1, ..., u^n\}$ una base ordenada de U, $\mathcal{B}_2 = \{v^1, ..., v^m\}$ una base ordenada de V, $f : U \to V$ una función lineal. La matriz de $\mathbb{R}^{m\times n}$, llamada matriz de f con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, denotada $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$, es la matriz tal que al multiplicar por las coordenadas de un $x \in U$ con respecto a $\mathcal{B}_1$ se obtienen las coordenadas de $f(x)$ con respecto a $\mathcal{B}_2$,

$$[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}[x]_{\mathcal{B}_1} = [f(x)]_{\mathcal{B}_2}\,. \tag{7.7}$$

Si $U = V$ y si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$, la matriz de la función lineal f se denota con una sola base: $[f]_{\mathcal{B}_1}$.

Si U y V tienen bases canónicas, entonces $[f]$ denota la matriz de f con respecto a la base canónica de U y a la base canónica de V.

La columna j de la matriz $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ está formada por las coordenadas de $f(u^j)$ con respecto a $\mathcal{B}_2$, es decir

$$[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} [f(u^1)]_{\mathcal{B}_2} & [f(u^2)]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & [f(u^n)]_{\mathcal{B}_2} \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

La matriz definida en (7.6) es la matriz con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y a la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Ver ejemplo anterior.

⋆ Sean U y V espacios vectoriales de igual dimensión, $f : U \to V$ lineal, $\mathcal{B}_1$ base de U, $\mathcal{B}_2$ base de V.

- f es uno a uno sssi $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ es invertible.
- f es sobre sssi $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ es invertible.

Ejemplo 7.8. Sea $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2, -2x_1)$, $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$. Obtener $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$.

$$f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [f(1,1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$f(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad [f(1,-1)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Comprobación de un caso particular. Sea $x = (5, -1)$. Obviamente $f(x) = (6, 7, -10)$. Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
[x]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
[f(x)]_{\mathcal{B}'} &= \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 17 \\ -10 \end{bmatrix} \\
f(x) &= -1(1, 0, 0) + 17(1, 1, 0) - 10(1, 1, 1) = (6, 7, -10).
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7.9. Obtener la matriz $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ con $f(A) = A + A^{\mathrm{T}}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y las dos bases

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \left\{ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \\
\mathcal{B}_2 &= \left\{ C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
f(A_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [f(A_1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
f(A_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [f(A_2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
f(A_3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [f(A_3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/12 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
f(A_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [f(A_4)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/12 \\ -3/20 \\ 2/5 \end{bmatrix}
$$

Entonces

$$
[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/12 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & -3/20 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}
$$

Como se había dicho antes, f está completamente determinada si se conoce f evaluada en los elementos de una base del espacio de salida. En particular, sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineal, $\mathcal{B} = \{v^1, v^2, ..., v^n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y se conoce $f(v^1)$, $f(v^2)$, ..., $f(v^n)$. Se desea conocer la expresión explícita de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Esta expresión se obtiene de manera directa si se conoce $[f]$, ya que $f(x) = [f]\, x$.

$$
\big[f\big] = \big[f\big]_{\mathcal{B}\mathcal{B}_c} M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}} \tag{7.9}
$$

$$
\big[f\big] = \begin{bmatrix} f(v^1) & f(v^2) & \cdots & f(v^n) \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix}^{-1}_{n\times n} \tag{7.10}
$$

Ejemplo 7.10. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $f(1,1,1) = (6,15)$, $f(2,0,-1) = (-1,2)$ y $f(0,2,1) = (7,16)$. Obtener $f(x_1, x_2, x_3)$.

Fácilmente se comprueba que $(1,1,1)$, $(2,0,-1)$ y $(0,2,1)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$ (el determinante de la matriz es 4).

$$
\begin{aligned}
[f] &= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 15 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 6 & -1 & 7 \\ 15 & 2 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/4 & -1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3,\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3)$.

Ejemplo 7.11. Sea $\mathcal{B}_1 = \{(1,1),(2,-1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(2,3),(-5,4)\}$ dos bases y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función lineal tal que

$$[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Obtener $f(x_1, x_2)$.

$$[f]_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_c} = M_{\mathcal{B}_2\mathcal{B}_c}[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}M_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_1} \tag{7.11}$$

Este producto, de derecha a izquierda, significa: primero se pasa de la base canónica a $\mathcal{B}_1$; después se obtienen las coordenadas de la imagen con respecto a la base $\mathcal{B}_2$; finalmente se obtienen las coordenadas de la imagen con respecto a $\mathcal{B}_c$.

$$
\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_c} &= \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \\
[f]_{\mathcal{B}_c\mathcal{B}_c} &= \begin{bmatrix} -3 & -13 \\ 7 & 15 \end{bmatrix} \\
f(x_1, x_2) &= (-3x_1 - 13x_2, 7x_1 + 15x_2).
\end{aligned}
$$

7.4 Isomorfismos

Definición 7.2. Sean U y V espacios vectoriales. Un **isomorfismo** es una función lineal $f : U \to V$ uno a uno y sobre. Si existe un isomorfismo de U a V, se dice que U y V son **isomorfos**.

⋆ Los espacios isomorfos tienen la misma dimensión.

⋆ En espacios de dimension finita, f es un isomorfismo sssi $[f]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2}$ es invertible.

Ejemplo 7.12. Sea $U = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $V = \mathbb{R}^4$, $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$. Esta función es lineal, uno a uno y sobre, es decir, es un isomorfismo y $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^4$ son isomorfos. Hay muchas más isomorfismos, pero basta con uno solo para decir que los dos espacios son isomorfos.

Ejemplo 7.13. De manera análoga, $\mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbb{R}^{mn}$ son isomorfos.

Ejemplo 7.14. Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ un polinomio de $\mathcal{P}_2$. La función $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(p) = (a_0, a_1, a_2)$ es un isomorfismo.

Ejemplo 7.15. Sea S_2 el conjunto de matrices en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ simétricas. La función $f : S_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{22})$ es un isomorfismo.

Ejemplo 7.16. Sea T_2 el conjunto de matrices en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ triangulares superiores. La función $f : T_2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(A) = (a_{11}, a_{12}, a_{22})$ es un isomorfismo.

Ejemplo 7.17. Sea $U = \mathbb{R}^2$, V un plano que pasa por el origen y $\{v^1, v^2\}$ una base de V. La función $f : U \to V$ tal que $f(1, 0) = v^1$ y $f(0, 1) = v^2$, es un isomorfimsmo.

8

Valores y vectores propios

8.1 Introducción

Definición 8.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sean $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^{n\times 1}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, tales que

$$Ax = \lambda x. \tag{8.1}$$

se dice que λ es un **valor propio** de A y x es un **vector propio** asociado a λ. Se dice que (λ, x) es una **pareja propia** de A.

En Scilab `v = spec(A)` permite obtener los valores propios, `[V, v] = spec(A)` permite obtener los valores propios y vectores propios.

Ejemplo 8.1.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Luego $x = (4, 1, 2)$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = 2$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -24 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -27 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Luego $x = (9, 1, -3)$ es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda = -3$. $\diamond$

Si se cumple

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ax - \lambda x &= 0 \\ Ax - \lambda I x &= 0 \\ (A - \lambda I)x &= 0 \end{aligned}$$

Como $x \neq 0$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Se puede demostrar que $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio con coeficientes reales, de grado n, llamado el **polinomio característico** de A. Se denota por $p_A(\lambda)$ o simplemente $p(\lambda)$. Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico.

Ejemplo 8.2.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -19 & 13 & 10 \end{bmatrix} \\
p_A(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -4-\lambda & 6 & 2 \\ 2 & 0-\lambda & 2 \\ -19 & 13 & 10-\lambda \end{bmatrix} \\
p_A(\lambda) &= (-4-\lambda)\left((0-\lambda)(10-\lambda) - 26\right) - 6\left(2(10-\lambda) + 38\right) + 2\left(26 - 19\lambda\right) \\
p_A(\lambda) &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 40\lambda - 192
\end{aligned}
$$

La raíces de este polinomio son: $\lambda = -6$, $\lambda = 8$ y $\lambda = 4$. Esos mismos valores son exactamente los valores propios de A.

Para encontrar un vector propio asociado a $\lambda = -6$ es necesario encontrar una solución no trivial de $(A - (-6)I)x = 0$. Esta se obtiene a partir de la escalonada reducida de $A + 6I$.

$$
A + 6I = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -19 & 13 & 16 \end{bmatrix}
$$

$$
E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Entonces, una solución del sistema homogéneo es $x = (1/2, -1/2, 1)$. Este x es un vector propio asociado al valor propio -6. Verificación:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -19 & 13 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

De manera análoga se pueden encontrar vectores propios asociados a 8 y 4. $\diamond$

El polinomio característico tiene necesariamente n raíces, pero algunas pueden ser complejas. Cuando hay raíces complejas, siempre vienen por parejas, una raíz y su conjugado (que también es raíz). Los polinomios de grado impar siempre tienen por lo menos una raíz real. Los vectores propios asociados a valores propios complejos son complejos.

En Scilab un polinomio se puede construir por medio de `p = poly([-192 40 6 -1], 't', 'c')`. Sus raíces se pueden obtener por medio de `roots(p)`.

El conjunto de todos los valores propios de A es el espectro de A, $\text{espc}(A)$.

Un conjunto de vectores propios de A, $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$, es un **conjunto completo de vectores propios**, si los vectores son linealmente independientes.

- Si x es un vector propio asociado a λ y $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, entonces kx también lo es.
- λ es un valor propio de A sssi $\det(A - \lambda I) = 0$.
- Sea $p_A(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$

  a) $\alpha_n = (-1)^n$.

b) $\alpha_{n-1} = \text{traza}(A)$.

c) $\alpha_0 = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = \det(A)$

- Si λ es un valor propio, $N_{A-\lambda I}$ es el espacio propio de A asociado a λ:

$$N_{A-\lambda I} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = 0\}.$$

  Todos sus elementos no nulos son vectores propios asociados a λ.

- Teorema de Hamilton-Cayley:

$$p_A(A) = \alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \alpha_{n-2}A^{n-2} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0.$$

- Todos los valores propios de una matriz simétrica son reales.
- A es singular (no es invertible) sssi 0 es un valor propio.
- Si A es invertible y (λ, x) es una pareja propia de A, entonces $(\dfrac{1}{\lambda}, x)$ es una pareja propia de A^{-1}.
- Si A es diagonal o triangular superior o triangular inferior, entonces su valores propios son sus elementos diagonales.
- Si en una fila (o columna) de A, todas las entradas no diagonales son nulas, entonces el elemento diagonal de la fila es un valor propio.

Ejemplo 8.3. Averiguar si 5 es valor propio de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(A - 5I) = 0,$$

luego 5 es un valor propio de A.

Ejemplo 8.4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Inmediatamente se deduce que 10 es un valor propio de A.

Ejemplo 8.5. Teorema de Hamilton Cayley.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda - 2$$

$$p_A(A) = \begin{bmatrix} 16 & 21 \\ 28 & 37 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.2 Semejanza de matrices y diagonalización

Definición 8.2. Dos matrices cuadradas del mismo tamaño A, B, son **semejantes** si existe una matriz invertible P tal que

$$B = P^{-1}AP\,. \tag{8.2}$$

La **multiplicidad algebraica** de un valor propio es la multiciplicidad en el polinomio característico.

La **multiplicidad geométrica** es la dimensión de $N_{A-\lambda I}$.

⋆ multiplicidad-geométrica(λ) $\leq$ multiplicidad-algebraica(λ)

Ejemplo 8.6.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \\ P &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ B = P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -22 & -29 \\ 28 & 37 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A y B son semejantes.

Ejemplo 8.7.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ p(\lambda) &= \lambda^2 = (\lambda - 0)^2 \\ \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0 \\ A - 0I &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ E &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ N_{A-0I} &= \text{gen}([1 \quad 0]^{\mathrm{T}}) \\ \text{mul-alg}(0) &= 2 \\ \text{mult-geom}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.8.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad p_b(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 - 18\lambda^2 + 128\lambda - 160 = (\lambda-4)^2(\lambda-2)(\lambda+5)$$

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mult-alg(4) $= 2$. Como en E hay una sola variable libre, entonces mult-geom(4) $= 1$.

Ejemplo 8.9.

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad p_B(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^3 - 18\lambda^2 + 128\lambda - 160 = (\lambda-4)^2(\lambda-2)(\lambda+5)$$

$$B - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mult-alg$(4) = 2$. Como en E hay dos variables libres, entonces mult-geom$(4) = 2$.

Definición 8.3. Una matriz es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal.

- Las matrices semejantes tienen los mismos valores propios (pero no necesariamente los mismos vectores propios).
- No todas las matrices cuadradas son diagonalizables.
- Todas las matrices simétricas son diagonalizables.
- Si A tiene n valores propios reales y diferentes, entonces es diagonalizable.
- Una matriz es diagonalizable si y solamente si todos su valores propios son reales y existen n vectores propios linealmente independientes. O, dicho de otra forma:
- A es diagonalizable sssi A tiene un sistema completo de vectores propios $\{v^1, v^2, ..., v^n\}$. Más aún, si $P = \begin{bmatrix} v^1 & v^2 & \cdots & v^n \end{bmatrix}$, entonces

  $$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \, ..., \lambda_n)$$

- A es diagonalizable sssi todos los valores propios son reales y

  $$\text{multiplicidad-geométrica}(\lambda) = \text{multiplicidad-algebraica}(\lambda)$$

  para todos los valores propios.

Ejemplo 8.10. Si es posible, diagonalice A.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$
$$p(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)$$
$$\lambda_1 = 3, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = 2, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Ejemplo 8.11. Si es posible, diagonalice A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$
$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 10\lambda - 24$$
$$p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = \ 2, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_2 = -3, \quad v^2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\lambda_3 = \ 4, \quad v^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 6/5 & 2/5 & 0 \\ -6/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Ejemplo 8.12. Si es posible, diagonalice A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se vio en un ejemplo anterior, mult-alg$(0) = 2$, mult-geom$(0) = 1$. Luego A no es digonalizable.

Ejemplo 8.13. Si es posible, diagonalice A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característicos es

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 33\lambda + 36 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$$

Es necesario hallar la multiplicidad geométrica de $\lambda = 3$.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego mult-geom$(3) = 2$ y, en consecuencia, A es diagonalizable.

$$\lambda = 3, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\lambda = 4, \quad v^1 = \begin{bmatrix} 6/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

⋆ Sea A diagonalizable con $D = P^{-1}AP$ diagonal. Entonces

$$A^k = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})$$
$$A^k = PD^kP^{-1} \tag{8.3}$$

Ejemplo 8.14. Calcular A^{10} con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por un ejemplo anterior,

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1}$$
$$A^{10} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59049 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175099 & -348150 \\ 58025 & -115026 \end{bmatrix}. \quad \diamond$$