0.1 Programa 1

1. Un subproblema muy frecuente en optimización numérica es el siguiente:

   Sean conocidos $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Es necesario resolver el siguiente problema

   $$\begin{aligned} \min \ & f(x + td) \\ & a \leq t \leq b \end{aligned}$$

   Este problema es de una sola variable, la variable t. Hay muchos métodos para encontrar numéricamente una aproximación de t^* minimizador del problema.

   Un método ineficiente pero que se puede programar muy fácilmente es el siguiente:

   $$\text{buscar el mejor} \quad t \text{ en } \{a, a+h, a+2h, ..., b\}$$

   donde h es un valor positivo pequeño. El mejor t es el que hace que $f(x + td)$ sea más pequeño. O sea, hay que buscar el mínimo de los valores
   $f(x+ad), f(x+(a+h)d), f(x+(a+2h)d), f(x+(a+3h)d), ..., f(x+bd)$

   Hacer un pequeño programa en Python o Scilab que tenga: dos funciones, una para f y otra para este método ineficiente; las asignaciones para x, d, a, b, h; el llamado a la función que "minimiza"; la escritura de resultados.

```
def f1(x):
    t = x[0]*x[0] + x[1]*x[1]
    return t
#------------------------------------------------------------
def min1abFB(f, x, d, a, b, h):
    #
    # min f( x + t d )  t en [a,b]
    #
    # evalua f( x + t d ) para t = a, a+h, a+2h, ..., b
```

```
    #
    # devuelve  tmin,  fmin
    #

    ...

    return [tmin, fmin]
#------------------------------------------------------------

x = ...
d = ...

res = min1abFB(f1, x, d, -20, 20, 0.0001)

print( ...
```

En Scilab

```
function fx = f1(x)
    fx = x(1)*x(1) + x(2)*x(2)
endfunction
//-----------------------------------------------------------
function [tmin, ftmin] = min1abFB(f, x, d, a, b, h)
    //
    // min f( x + t d )  t en [a,b]
    //
    // evalua f( x + t d ) para t = a, a+h, a+2h, ..., b
    //
    // devuelve  tmin,  fmin
    //

    ...

endfunction

x = [-2; 2]
d = [1; 0]
a = -20
```

```
b = 20
[tmin, ft] = min1abFB(f1, x, d, a, b, 0.001)
```

2. Hacer una función en Python o Scilab para resolver el siguiente problema. Dados f, x, d

   $$\min \; f(x+td), \quad t \in \mathbb{R}$$

   Parámetros: $f, \quad x, \quad d, M$

   M es un valor positivo grande. Si en el proceso debe trabajar con t tal que $|t| \geq M$ se supone que este problema tiene óptimo no acotado.

   Resultados: $t_{\min}, \quad f(t_{\min}),$ `info`

   `info` indicará si se obtuvo una aproximación del minimizador o si, aparentemente, hay óptimo no acotado.

   Esta función hace uso eficiente de la función anterior, es decir, no empieza usándola con el intervalo $[-1000000, 1000000]$.

3. Hacer una función enn Python o Scilab para resolver el problema

   $$\min \; f(x)$$

   por medio del método cíclico coordenado. Algunas de las fórmulas del método son:

   $$\begin{aligned}
   & y^1 = x^0 \\
   & t_i = \operatorname{argmin} f(y^i + te^i), \quad t \in \mathbb{R} \\
   & y^{i+1} = y^i + t_i e^i \\
   & x^{k+1} = y^{n+1} \\
   & \textbf{si } ||x^{k+1} - x^k|| \leq \varepsilon, \; \textbf{parar} \\
   & y^1 = x^{k+1} \\
   & \text{repetir}
   \end{aligned}$$

   e^i es un vector de la base canónica.

   Parámetros, $f, \quad x^0, \quad \varepsilon,$ `maxit`

   Resultados : x^* (minimizador o último x obtenido), $f(x^*)$, `info`

   `info` indica si el proceso terminó satisfactoriamente (se obtuvo una buena aproximación de un minimizador local) o si hubo muchas iteraciones o si se detectó óptimo no acotado.

4. Ensayar la función anterior con varias funciones f.

0.2 Conjuntos convexos

1. Sean $x^1 = (-18, -1, 2)$, $x^2 = (0, -1, -4)$, $x^3 = (0, 2, -1)$, $S = \{x^1, x^2, x^3\}$, $C = \mathrm{co}(S)$, $L = \mathrm{af}(S)$, $K = \mathrm{cono}(S)$.

   a) ¿ $x = (18, 13, 5)$ está en L ?

   b) ¿ $y = (-9, -1/2, -1/2)$ está en C ?

   c) ¿ $z = (-9, 1/2, 1/2)$ está en $\mathrm{ir}(C)$?

   d) ¿ $u = (-54, -3, -3)$ está en K ?

   e) ¿ $(0, 1, 1) \leq_K (-18, 0, 0)$?

   f) Encuentre A, b tales que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = b\}$.

2. Sea $C = \{(x_1, x_2) : x_1^2 - x_2 \leq 0,\ \ x_1 + 4x_2 - 18 \leq 0\}$.

   a) Sea $\bar{x} = (1, 1)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$. Si es posible, obtenga otro hiperplano de apoyo.

   b) Sea $\bar{x} = (0, 1)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$. Si es posible, obtenga otro hiperplano de apoyo.

   c) Sea $\bar{x} = (2, 4)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$. Si es posible, obtenga otro hiperplano de apoyo.

3. Sea $C = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 \leq 25,\ \ -x_3 \leq 0\}$.

   a) Sea $\bar{x} = (1, 1, 6)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$.

   b) Sea $\bar{x} = (0, 4, 5)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$. Si es posible, obtenga otro hiperplano de apoyo.

   c) Sea $\bar{x} = (0, 1)$. Si es posible, obtenga un hiperplano de apoyo de C en $\bar{x}$. Si es posible, obtenga otro hiperplano de apoyo.

4. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ linealmente independientes.

   a) Diga si $\mathrm{cono}(x) + \mathrm{cono}(y) = \mathrm{cono}(x, y)$. Justifique o demuestre.

b) Sea $x = (1,1,1)$, $y = (1,2,3)$. ¿Qué relación hay entre $\text{cono}(x,y)$ y $\text{co}(x,y)$ (convexo generado por x,y)? ¿Son iguales o uno es subconjunto propio del otro u otro caso?

c) Describa, cuando sea posible, por medio de desigualdades o igualdades matriciales u otra expresión matemática los conjuntos $\text{af}(x,y)$ y $\text{af}(\text{cono}(x,y))$.

5. Exprese $C = \{(x_1,x_2) : x_1^2+x_2^2 \leq 4\}$ como intersección de semiespacios. Describa explícitamente los semiespacios.

6. Sea $r > 0$, (c_1,c_2) un punto fijo. Exprese $C = \{(x_1,x_2) : (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \leq r^2\}$ como intersección de semiespacios. Describa explícitamente los semiespacios.

7. Sea $K = \text{cono}((1,0),(1,1))$. Describa claramente su cono dual.

8. Describa por medio de desigualdades el conjunto $C = [(1,2),(2,1)] + \text{co}((1,0),(1,1))$. ($[x,y]$ es el segmento que une los dos puntos).

9. Describa por medio de desigualdades el conjunto $C = [(1,2),(2,1)] + \text{cono}((1,0),(1,1))$. ($[x,y]$ es el segmento que une los dos puntos).

10. $S = \{x : Ax \leq 0\}$, con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
¿S es afín, convexo, cono, cono propio?

11. $S = \{x : Ax \leq 0\}$, con
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
¿S es afín, convexo, cono, cono propio?

12. Sea $C = \text{co}((2,3),(4,5),(0,6))$. ¿$\text{int}(C) = \text{ir}(C)$? Si no es cierto, dé un punto que pertenece a un conjunto y no al otro. Exprese mediante igualdades o desigualdades los conjuntos.

13. Sea $C = \text{co}((2,3,1),(4,5,1),(0,6,1))$. ¿$\text{int}(C) = \text{ir}(C)$? Si no es cierto, dé un punto que pertenece a un conjunto y no al otro. Exprese mediante igualdades o desigualdades los conjuntos.

0.3 Funciones convexas

1. Para cada una de las siguientes funciones responda a cada una de las siguientes preguntas:
   ¿es f convexa?
   ¿es f cóncava?
   ¿es f cuasiconvexa?
   ¿es f cuasicóncava?
   En caso de respuesta afirmativa, justifique. En caso de respuesta negativa, use dos criterios diferentes.

   i $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2$

   ii $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_{++}$

   iii $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2$

   iv $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_{++}$

   v $f(a, b) = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 - 3b + a^2 - 2ab + 5b^2 - 10b + 100$, en $\mathbb{R}^2$

   vi $f(x) = \log(x^3) + 10$ para $x \geq -2$.

   vii $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 10x_1 + 100x_2$ en $\mathbb{R}^2$.

   viii $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 2)^2$

   ix $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 2)^3$

   x $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 2)^2$

   xi $f(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2 + 2)^2$

   xii $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 4$

   xiii $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4$

   xiv $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - 3x_1 - 4x_2$

   xv $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_{+}$.

   xvi $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_{+}$.

   xvii $f(x) = (x + 1)^3 - 1$

   xviii $f(x) = -(x - 2)^3 + 100$

   xix $f(x) = \max\{1, x^2\}$

   xx $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + 10$

xxi $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$

xxii $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$ en $\mathbb{R}^2_+$.

xxiii $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$

xxiv $f(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2}$

xxv $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$

xxvi $f(x) = \sqrt{|x|}$

xxvii $f(x) = x|x|$

xxviii $f(x) = e^{-x^2}$

xxix $f(x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

xxx $f(x) = \begin{cases} \log(|x|) & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$

xxxi $f(x) = |x|x^2$

xxxii $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

xxxiii $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2$

xxxiv $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 3x_2^2$

xxxv $f(x) = 1/x^\alpha$ para $x > 0$, con $\alpha > 0$ fijo.

xxxvi $f(x) = x^\alpha$ para $x > 0$, con $\alpha > 0$ fijo.

xxxvii $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xxxviii $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xxxix $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xl $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos (función de Cobb-Douglas).

xli $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

xlii $f(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$.

xliii $f(x_1, x_2) = 2\log(x_1) + 3\log(x_2)$, para $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

xliv $f(x_1, x_2) = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}$, para $x \in \mathbb{R}^2_+$.

xlv $f(x_1, x_2) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$.

xlvi $f(x_1, x_2) = (\log x_1)^\alpha + (\log x_2)^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos.

xlvii $f(x_1, x_2) = (\log x_1)^\alpha (\log x_2)^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos.

xlviii $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + c)^2$

xlix $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + c)^6$

l $f(x) = (c^{\mathrm{T}} x + d)^2$ en $\mathbb{R}^n$.

li $f(x) = (c^{\mathrm{T}} x + d)^{22}$ en $\mathbb{R}^n$.

2. De las funciones del ejercicio anterior, ¿cuáles con log-convexas? ¿cuáles con log-cóncavas?

0.4 Problemas de optimización convexa

1. Considere el problema

$$\begin{aligned} \min\ \ f(x_1, x_2) = (x_1 - 5.5)^2 + (x_2 + 2)^2 \\ 2x_1^2 - x_2 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \end{aligned}$$

   Aplique (4.21) del libro de Boyd para saber si los sigientes puntos son minimizadores globales.

   i) $\bar{x} = (1/2, 2)$

   ii) $\bar{x} = (1, 2)$

   iii) $\bar{x} = (0, 0)$

   iv) $\bar{x} = (1/2, 1/2)$

2. Problema de optimización cuadrática convexa no restringida

$$\min\ \ f(x) = 0.5\, x^{\mathrm{T}} H x + c^{\mathrm{T}} x + K$$

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -17 \\ 2 & 19 & -6 \\ -17 & -6 & 31 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 12 \\ -14 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -4 \\ 6 & 9 & -9 \\ -4 & -9 & 10 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -32 \\ -27 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 18 & -3 & 15 \\ -3 & 5 & -1 \\ 15 & -1 & 13 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -62 \\ 0 \\ -56 \end{bmatrix}$$

3. Problema de mínimos cuadrados. Sea $\varphi(t) = t^2 - 2t + 3$. Construya un vector x con los números $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Construya un vector y con los valores $\varphi(x_i)$. A cada valor y_i súmele "aleatoriamente" un número del conjunto $\{-1, -0.9, -0.8, ..., 0.9, 1\}$. Por medio de mínimos cuadrados obtenga la parábola que aproximadamente "pasa" por los puntos (x_i, y_i).

4. Considere el conjunto $\{(x_1, x_2) : Ax < b\}$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Por medio de una función de Scilab o Python o por la función o programa del método cíclico coordenado o ... resuelva la ecuación (4.25) para obtener el centro analítico.

5.

$$\begin{aligned} \min\ f(x) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 \\ &\quad - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 20x_1 - 24x_2 + 6x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 18 \end{bmatrix}$$