EJERCICIOS

MATRICES DEFINIDAS POSITIVAS, CONJUNTOS CONVEXOS, FUNCIONES CONVEXAS

1. Diga si la matriz es definida positiva, semidefinida positiva, definida negativa, semidefinida negativa, indefinida.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -7 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad A^5 = \begin{bmatrix} 9 & -18 & -15 \\ -18 & 40 & 22 \\ -15 & 22 & 42 \end{bmatrix}, \quad A^6 = \begin{bmatrix} -9 & 6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 11 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 12 & -3 \\ 2 & 3 & -3 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^8 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 20 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 30 & 25 \\ 2 & 3 & 25 & 20 \end{bmatrix},$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 11 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 12 & -14 \\ 2 & 3 & -14 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^{10} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 20 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 30 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -20 \end{bmatrix},$$

$$A^{11} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 11 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 13 & 11 \end{bmatrix}, \quad A^{12} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 11 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 12 & 13 \\ 2 & 3 & 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

2. Diga si las siguientes matrices A son definidas positivas o semidefinidas positivas en el espacio nulo de la matriz M.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

e)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$, con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}.$$
¿La función f es estrictamente convexa, convexa, cóncava, estrictamente cóncava, ni convexa ni cóncava?

4. Sea $f(x) = x^{\mathrm{T}} A x$, con
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & t \end{bmatrix}.$$
¿Para qué valores de t (un intervalo) f es estrictamente convexa, convexa, cóncava, estrictamente cóncava, ni convexa ni cóncava?

5. Diga si los siguientes conjuntos son convexos.

a) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| \geq 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 5\}$

f) $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ ...,\ x_n \geq 0.\ \}$

g) $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1 - 3| + |x_2 - 4| \leq 5\}$

h) $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 x_2 = 5\}$

i) $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 x_2 \leq 5\}$

j) $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 x_2 \geq 5\}$

k) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 2, \quad 6x_1 + 7x_2 \leq 19\}$

l) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 2, \quad 6x_1 + 7x_2 \geq 19\}$

m) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - 4x_2 = 2, \quad 6x_1 + 7x_2 = 19\}$

n) $\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x_1^2 + x_2^2 \geq 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$

6. Diga si la función f es estrictamente convexa, convexa, estrictamente cuasiconvexa, semiestrictamente cuasiconvexa, cuasiconvexa, estrictamente cóncava, cóncava, estrictatemente cuasicóncava, semiestrictamente cuasicóncava, cuasicóncava. ¿Porqué? Si la función depende de uno o más parámetros fijos α, β, ..., diga para que valores de estos la función es convexa o cuasiconvexa o cóncava o ...

i) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 2)^2$

ii) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 - 2)^3$

iii) $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 + 2)^2$

iv) $f(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2 + 2)^2$

v) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 4$

vi) $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 4$

vii) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 3x_1 - 4x_2$

viii) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_+$.

ix) $f(x_1, x_2) = -x_1 x_2$ en $\mathbb{R}^2_+$.

x) $f(x) = (x+1)^3 - 1$

xi) $f(x) = -(x-2)^3 + 100$

xii) $f(x) = \max\{1, x^2\}$

xiii) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + 10$

xiv) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$

xv) $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$ en $\mathbb{R}^2_+$.

xvi) $f(x_1, x_2) = -(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 + 10$

xvii) $f(x_1, x_2) = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2}$

xviii) $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$

xix) $f(x) = \sqrt{|x|}$

xx) $f(x) = x|x|$

xxi) $f(x) = e^{-x^2}$

xxii) $f(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$

xxiii) $f(x) = \begin{cases} \log(|x|) & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$

xxiv) $f(x) = |x|x^2$

xxv) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

xxvi) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2$

xxvii) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 + 3x_2^2$

xxviii) $f(x) = 1/x^\alpha$ para $x > 0$, con $\alpha > 0$ fijo.

xxix) $f(x) = x^\alpha$ para $x > 0$, con $\alpha > 0$ fijo.

xxx) $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^2$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xxxi) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$, $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xxxii) $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$, $x \in \mathbb{R}^2_{++}$.

xxxiii) $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos (función de Cobb-Douglas).

xxxiv) $f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

xxxv) $f(x_1, x_2) = 2\log(x_1) + 3\log(x_2)$, para $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

xxxvi) $f(x_1, x_2) = (x_1^p + x_2^p)^{1/p}$, para $x \in \mathbb{R}^2_+$.

xxxvii) $f(x_1, x_2) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{1/p}$.

xxxviii) $f(x_1, x_2) = (\log x_1)^\alpha + (\log x_2)^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos.

xxxix) $f(x_1, x_2) = (\log x_1)^\alpha (\log x_2)^\beta$ para $x \in \mathbb{R}^2_{++}$, con $\alpha > 0$, $\beta > 0$ fijos.

7. a) Suponga que la retención en la fuente es nula para salarios menores o iguales a dos millones de pesos, es del 5% para salarios mayores que dos millones y menores o iguales a cuatro millones y del 10% para salarios superiores. Sea $r(x)$ el valor retenido en función del salario x. Diga si la función r es convexa, estrictamente convexa, cóncava, estrictamente concava, cuasiconvexa, ..., o ninguna de las anteriores.

b) Sea $n(x)$ el salario neto despues de hecha la retención, es decir, $n(x) = x - r(x)$. Diga si la función n es convexa, estrictamente convexa, cóncava, estrictamente concava, cuasiconvexa, ... o ninguna de las anteriores.

8. En los ejercicios siguientes estudie el problema propuesto, use condiciones necesarias, suficientes, condiciones de segundo orden y otros argumentos.

¿Puede garantizar la existencia de un optimizador global?

Si no hay puntos $\bar{x}$ propuestos, encuentre, si es posible, puntos factibles. ¿Son puntos de KKT? ¿Son estos puntos optimizadores locales? ¿Son minimizadores globales?

Para problemas "fáciles" (por ejemplo, f cuadrática, restricciones lineales, pocas rstricciones, ...) estudie todos los posibles casos del conjunto $\mathcal{I}$ (conjunto de índices de desigualdades activas).

1. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$.
2. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \geq 12$.
3. Minimizar $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$.
4. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$, $x_1 \leq 0$.
5. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$, $x_1 \leq 0$, $x_2 \geq 3$.
6. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$.
7. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \geq 12$.
8. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$, $x \geq 0$.
9. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \geq 12$, $x \geq 0$.
10. Minimizar $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$, sujeto a $||x - a||_2 = r$, con $c \neq 0$, $r > 0$.
11. Minimizar $f(x) = c^{\mathrm{T}}x$, sujeto a $||x - a||_2 \leq r$, con $c \neq 0$, $r > 0$.
12. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 = 12$.
13. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \geq 12$.
14. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \leq 12$, $x \geq 0$.
15. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$, sujeto a $3x_1 + 4x_2 \geq 12$, $x \geq 0$.
16. Minimizar $f(x_1, x_2) = 10x_1x_2$ con $4x_1 + 5x_2 = 9$, $x \geq 0$.
17. Maximizar $f(x_1, x_2) = 10x_1x_2$ con $4x_1 + 5x_2 = 9$, $x \geq 0$.
18. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = 1$, $x \geq 0$.
19. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 1$, $x \geq 0$.
20. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 1$, $x \geq 0$.
21. Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 25$, $x \geq 0$.
22. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2}x_2$, con $4x_1 + 5x_2 = 20$, $x_1, x_2 \geq 1$.
23. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$, con $px_1 + qx_2 = C$, $x_1, x_2 \geq 0.1$, y α, β, p, q, C valores fijos estrictamente positivos.
24. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$, con $2x_1 + 2x_1x_2 + x_2^3 = 1$, $x_1, x_2 \geq 0.1$.

25. Maximizar $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ con $2x_1 + 3x_2 = 12$, $x_1, x_2 \geq 0.1$.

26. Maximizar $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$ con $2x_1 + 3x_2 = 12$, $x_1, x_2 \geq 0.1$.

27. Maximizar $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + 4x_1$ con $x_1^2 + 2x_2 = 8$, $x_1, x_2 \geq 0.1$.

28. Minimizar $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, con $x_1 + x_2 + x_3 \geq 15$, $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \geq 75$.

29. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $(1 - x_1 - x_2)^3 \geq 0$, $x \geq 0$.

30. Maximizar $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ con $1 - x_1 - x_2 \geq 0$, $x \geq 0$.

31. Minimizar $f(x_1, x_2) = px_1 + qx_2$ con $x_2 - x_1^2 \geq 1$, $x \geq 0$ y p, q valores fijos estrictamente positivos.

32. Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2$ con $x_2 \leq (x_1 - 9)^2 + 7$

33. Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2$ con $x_2 \leq (x_1 - 9)^2/2 + 7$

34. Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2$ con $x_2 \leq (x_1 - 9)^2/4 + 7$

35. Minimizar $f(x_1, x_2) = (x_1 - 9)^2 + (x_2 - 8)^2$ con $x_2 = (x_1 - 9)^2/4 + 7$, $x_2 \leq 12$.