

¿ QUÉ ES EL MÉTODO DE KARMARKAR ?

Héctor Manuel Mora Escobar
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad Nacional de Colombia
Santafé de Bogotá
1995

1. INTRODUCCIÓN

En 1984 Narendra Karmarkar, un matemático hindú de 28 años, egresado del Instituto de Tecnología en Bombay, del Instituto de Tecnología de California y de la Universidad de California en Berkeley, investigador de los laboratorios AT&T Bell, publicó el artículo *A New Polynomial-Time Algorithm for Linear Programming* [2], que marcó un hito en la Optimización Lineal, OL, también conocida como Programación Lineal. A partir del trabajo de Karmarkar se reactivó la investigación en OL, en especial en métodos de barrera y de punto interior (también para Optimización No Lineal). En la base de datos *Math Sci*, una de las más completas sobre publicaciones matemáticas internacionales, aparecen por lo menos 593 ítems relacionados con el método de Karmarkar o con métodos de punto interior.

2. OPTIMIZACIÓN LINEAL

En pocas palabras se puede decir que se tiene un problema de OL cuando se desea minimizar (o maximizar) una función lineal de varias variables en presencia de restricciones (igualdades, desigualdades \geq o desigualdades \leq) también lineales.

La función que se desea minimizar se acostumbra a llamar función objetivo o función económica y se denota generalmente por z . Si las n variables son x_1, x_2, \dots, x_n , entonces la función lineal z se puede escribir

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

donde c_1, c_2, \dots, c_n son constantes.

Si se tiene un problema de maximización, éste se puede convertir en uno de minimización cambiando el signo de todos los coeficientes c_j , por esta razón siempre se puede suponer que todos los problemas de OL son problemas de minimización.

Una restricción es lineal cuando es de alguna de las de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\geq b_i \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n &\leq b_i \end{aligned}$$

donde $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i$ son constantes.

Con mucha frecuencia todas las variables (o algunas) deben ser no negativas, o sea

$$x_j \geq 0.$$

La anterior restricción es un caso particular de una desigualdad lineal \geq .

El siguiente es un ejemplo de un problema de OL con 3 variables no negativas y dos restricciones:

$$\begin{aligned} \min z = & 3.1x_1 + 2x_2 - 5.1x_3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ & 2x_1 + 3.2x_2 - x_3 = 4.1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Una desigualdad siempre se puede convertir en una igualdad sumando o restando una nueva variable no negativa llamada variable de holgura. Cuando en un problema todas las variables son no negativas y las demás restricciones son igualdades se dice que el problema está en la forma estándar:

$$\begin{aligned} \min z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

que se puede escribir de manera matricial

$$\begin{aligned} \min z &= [c_1 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\geq \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y de manera más compacta

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$, es decir, un arreglo de números compuesto por m filas (horizontales) y por n columnas (verticales), x es un vector columna $n \times 1$, b es un vector columna $m \times 1$, c es un vector columna $n \times 1$, c^T es el trapuesto de c y por lo tanto es un vector fila $n \times 1$. Si D es un matriz $m \times n$, entonces D^T , la traspuesta de D , es un matriz $n \times m$, donde las filas de D se convierten en las columnas de D^T y donde las columnas de D se convierten en las filas de D^T . Si D es una matriz $u \times v$ y E es una matriz $p \times q$, entonces el producto $F = DE$ está definido cuando $v = p$, o sea, cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, y en este caso F será de tamaño $u \times q$. El elemento f_{ij} en la fila i y en la columna j de F está definido por la fórmula $f_{ij} = \sum_{k=1}^v d_{ik}e_{kj}$, es decir, es la suma de los productos de los elementos de la fila i de la primera matriz y de los elementos de la columna j de la segunda matriz.

3. EL MÉTODO SIMPLEX

Si un problema está en la forma estándar, si $b \geq 0$ y si, tomando adecuadamente m columnas de A , se puede formar la matriz identidad (una matriz $m \times m$ con unos en la diagonal y ceros en las demás posiciones) se puede aplicar fácilmente el método simplex creado por George B. Dantzig al final de la década de los cuarentas. Un vector o punto x se llama una solución factible básica no degenerada si cumple todas las restricciones y tiene exactamente m componentes

positivas y $n - m$ componentes nulas. En el método simplex (si no hay degeneramiento) se parte de una solución básica no degenerada x^1 . Si x^1 es óptimo se detiene el proceso iterativo pues se tiene ya la solución óptima. Si no es óptimo se construye otro punto x^2 también solución factible básica no degenerada mejor que x^1 , o sea, que hace disminuir el valor de z ($c^T x^2 < c^T x^1$). Si x^2 no es óptimo el método simplex permite obtener otro punto x^3 solución factible básica no degenerada, mejor que x^2 y así sucesivamente. Como el número de soluciones factibles básicas es finito, entonces al cabo de un número finito de iteraciones se obtiene una solución básica factible óptima o se llega a la conclusión de que no hay un valor mínimo de z (se puede hacer descender el valor de z en puntos factibles tanto como se desee).

Un resultado importante para los problemas de OL es el siguiente: si existe z^* , valor mínimo de z , siempre existe por lo menos una solución factible básica donde se alcanza el valor z^* . Claro está que en algunos problemas el valor de z^* se puede obtener en puntos que no son soluciones factibles básicas. Dicho de otra forma, si z^* existe, entonces siempre hay por lo menos un punto óptimo que es solución básica factible, pero en algunos casos hay puntos óptimos que no son soluciones básicas factibles. Por esto el método simplex trabaja únicamente con soluciones factibles básicas. Las soluciones básicas factibles son exactamente los vértices del conjunto factible (conjunto de puntos que cumplen todas las restricciones).

No es un objetivo de este artículo ver los detalles del simplex pero si se puede ver en un ejemplo cuales son los puntos obtenidos por el simplex.

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + 1.4x_2 \\
 & x_1 + x_2 \leq 400 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 580 \\
 & x_1 \leq 300 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Al convertirlo en un problema de minimización e introduciendo variables de holgura se tiene

$$\begin{aligned}
 \min z = & -x_1 - 1.4x_2 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 = 400 \\
 & x_1 + 2x_2 + x_4 = 580 \\
 & x_1 + x_5 = 300 \\
 & x \geq 0
 \end{aligned}$$

Este ejemplo es perfecto para empezar el simplex: está en la forma estándar, los términos independientes son positivos y al escoger la columna de x_3 , la de

x_4 y la de x_5 se obtiene la matriz identidad. Los punto obtenidos por el simplex son:

$$\begin{array}{ll} x^1 = (0, 0, 400, 580, 300) & z = 0 \\ x^2 = (0, 290, 110, 0, 300) & z = -406 \\ x^* = x^3 = (220, 180, 0, 0, 80) & z^* = -472 \end{array}$$

Si se considera el ejemplo con las dos variables originales, el conjunto factible está representado en el siguiente dibujo:

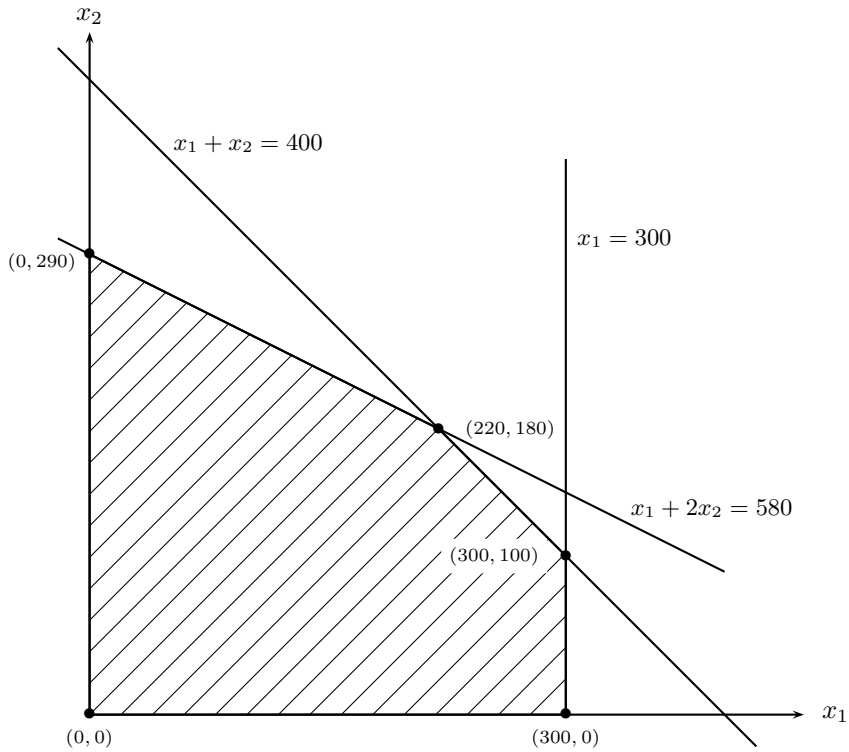


Figura 1. Ejemplo de un región admisible en \mathbb{R}^2 .

Los puntos obtenidos por el simplex serían:

$$\begin{array}{l} x^1 = (0, 0) \\ x^2 = (0, 290) \\ x^* = x^3 = (220, 180) \end{array}$$

que corresponden a 3 vértices del pentágono determinado por las restricciones.

Otra implementación del simplex hubiera podido dar como resultado

$$\begin{array}{ll}
x^1 = (0, & 0, 400, 580, 300) & z = 0 \\
x^2 = (300, & 0, 100, 280, 0) & z = -300 \\
x^3 = (300, & 100, 0, 80, 0) & z = -440 \\
x^* = x^4 = (220, & 180, 0, 0, 80) & z^* = -472
\end{array}$$

y en dos variables

$$\begin{array}{l}
x^1 = (0, 0) \\
x^2 = (300, 0) \\
x^3 = (300, 100) \\
x^* = x^4 = (220, 180)
\end{array}$$

En este ejemplo se ve claramente una característica del simplex: el avance se hace de vértice en vértice. Obviamente los vértices quedan en la frontera o contorno del conjunto admisible.

4. ALGORITMOS POLINOMIALES Y EXPONENCIALES

Se dice que un algoritmo es polinomial cuando el número de operaciones necesarias para llegar a la solución teóricamente exacta o a la solución aproximada (con cierta medida de la precisión), se puede expresar como un polinomio en función de la variable o las variables que miden el tamaño del problema. Para un problema de OL en la forma estándar, su tamaño está determinado por m (el número de restricciones) y por n (el número de variables). Por ejemplo, si se pudiera demostrar que para todo problema de programación lineal en la forma estándar, el número de operaciones del método simplex no sobrepasa $3m^4n^2 + 15m^4n$ (uno de los muchos polinomios en m y n), entonces se diría que el simplex es un algoritmo polinomial.

De manera muy sencilla se dice que un algoritmo es exponencial si el número de operaciones necesarias para llegar a la solución es aproximadamente proporcional a una función exponencial de la forma $a^{g(n)}$, donde $a > 1$ es una constante y $g(n)$ es mayor o igual (para valores grandes de n) a un polinomio (no constante) en n . Por ejemplo, si se pudiera demostrar que en un algoritmo el número de operaciones necesarias para llegar a la solución es aproximadamente $2.5^{n^2} 3m^4(n^2 + 5n)$, entonces se diría que este algoritmo es exponencial.

Obviamente para valores grandes de m y n es preferible un algoritmo polinomial a un algoritmo exponencial ya que un polinomio crece menos rápidamente que una función exponencial. Por ejemplo si $n = 10$, entonces $n^3 = 1000$ y $3^n = 59049$ si $n = 100$, entonces $n^3 = 10^6$ y $3^n = 5.1 \times 10^{47}$

Cada iteración del método simplex requiere aproximadamente $2mn$ operaciones, entonces una iteración del simplex es polinomial. Dantzig [1] dice que para la mayoría de los problema el número de iteraciones no sobrepasa $3m$, más aún, con frecuencia el número de iteraciones no sobrepasa $3m/2$. Luego para la mayoría de los problemas el número de operaciones no es mayor que $6m^2n$, es decir, en la mayoría de los casos el método simplex es polinomial. Pero en 1972

Klee y Minty [3] construyeron un ejemplo donde el número de iteraciones es 2^n , así en este caso artificial el número de operaciones es aproximadamente $2^{n+1}mn$ es decir exponencial. En resumen, en la mayoría de los casos el simplex es polinomial -¡bueno!- pero en algunos casos puede ser exponencial -¡muy malo!-.

Quedaba entonces la inquietud de construir un algoritmo que fuera polinomial aún en el peor de los casos. En 1979 el matemático ruso L. G. Kachian o Kachiyan propone un nuevo método polinomial para problemas de OL basado en el método elipsoide pero desafortunadamente resultó menos eficiente, en la práctica, que el simplex. En el método de Karmarkar el número de iteraciones es aproximadamente proporcional a $n^{3.5}$ y el número de operaciones de una iteración es polinomial, entonces el método de Karmarkar es polinomial.

En la práctica, el método de Karmarkar es más eficiente que el simplex sólo para problemas grandes, con matrices de coeficientes de estructura particular. Para problemas pequeños (mas o menos los que se pueden resolver en un microcomputador) y donde la matriz de coeficientes no tiene ninguna estructura particular y es densa (tiene pocos ceros) generalmente el simplex es mejor.

5. EL MÉTODO DE KARMARKAR

El método de Karmarkar se puede aplicar a problemas de OL que tienen una forma especial, llamada la forma canónica de Karmarkar FCK. Cuando un problema de OL no está en la FCK, entonces es necesario hacer algunas transformaciones (considerar el dual, introducir variables de holgura, pasarlo a un problema de factibilidad, ... (ver [2], [4]) para obtener un problema más grande, en la FCK, pero equivalente al inicial. Aquí equivalente quiere decir que a partir de la solución del problema modificado se puede obtener la solución del problema inicial.

Denotemos por PCK1 el problema inicial en la FCK:

$$\begin{aligned} \min z &= c^T x \\ Ax &= 0 \\ e^t x &= 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{PCK1}$$

donde:

A es una matriz $m \times n$, $m \leq n$, las filas de A son linealmente independientes, c , x , e son vectores columna $n \times 1$.

$$e^T = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]$$

y además se cumplen las siguientes dos condiciones

el valor óptimo de z es cero : $z^* = 0$,

el punto $\bar{e} = \frac{1}{n}e$ es admisible.

Utilicemos la siguiente notación

$$\begin{aligned}\Omega &= \{ x \mid Ax = 0 \}, \\ \Delta &= \{ x \mid e^T x = 1, x \geq 0 \}, \\ F &= \Omega \cap \Delta, \\ \overset{\circ}{\Delta} &= \{ x \mid e^T x = 1, x > 0 \}, \text{ interior relativo de } \Delta, \\ \overset{\circ}{F} &= \Omega \cap \overset{\circ}{\Delta}, \text{ interior relativo de } F, \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &\equiv (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \\ D(x) &= \text{matriz diagonal } n \times n, \text{ cuyos elementos diagonales} \\ &\quad \text{son las } n \text{ componentes de } x, \text{ vector columna } n \times 1, \\ D^{-1}(x) &= D\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right) \text{ si } x_i \neq 0 \text{ para todo } i.\end{aligned}$$

El PCK1 se escribe simplemente

$$\begin{aligned}\min z &= c^T x \\ x &\in F\end{aligned} \tag{PCK1}$$

Además se tienen los siguientes resultados (algunas demostraciones son casi inmediatas, otras –sobre todo las referentes a las transformaciones proyectivas– son más elaboradas):

- Ω es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n .
- para $n = 2$, Δ es el segmento de recta que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y $\overset{\circ}{\Delta}$ es el mismo segmento sin los dos puntos extremos.
- para $n = 3$, Δ es el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ y $\overset{\circ}{\Delta}$ es el mismo triángulo sin los vértices y sin los lados.
- los vértices de Δ son: $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \dots, 0, 1)$.
- decir que \bar{e} es factible es equivalente a decir que $Ae = 0$.

- \bar{e} es el “centro” de Δ .

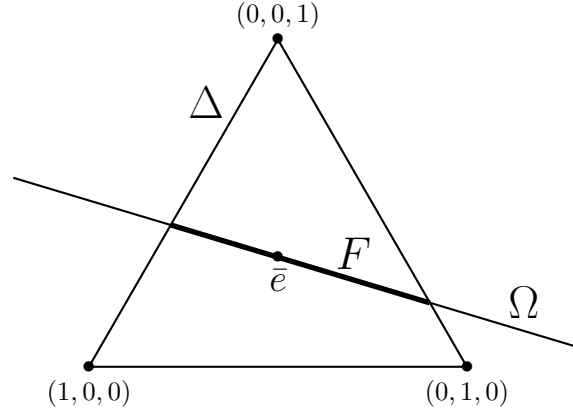


Figura 2. Los conjuntos Δ y F en \mathbb{R}^3 .

El método de Karmarkar está basado en transformaciones proyectivas definidas de la siguiente manera: sea ξ un punto fijo de $\overset{\circ}{F}$, es decir, $A\xi = 0$, $e^T\xi = 1$, $\xi > 0$

$$T_\xi : \Delta \longrightarrow \Delta$$

$$x \longmapsto T_\xi(x) = \frac{D^{-1}(\xi)x}{e^T D^{-1}(\xi)x}$$

T_ξ cumple las siguientes propiedades:

- para todo $x \in \Delta$, se cumple que $T_\xi(x)$ está definido y $T_\xi(x) \in \Delta$, es decir, T_ξ está bien definida.
- T_ξ es una función uno a uno y sobre, luego admite función inversa.
- $T_\xi^{-1}(y) = \frac{D(\xi)y}{e^T D(\xi)y}$.
- si v es un vértice de Δ , entonces $T_\xi(v)$ también es vértice de Δ .
- $T_\xi(\xi) = \bar{e}$, es decir, T_ξ envía a ξ en el “centro” de Δ .
- sea $\tilde{\Omega} = T_\xi(\Omega)$, entonces $\tilde{\Omega} = \{ y \mid \tilde{A}y = 0 \}$, donde $\tilde{A} = AD(\xi)$, es decir, la imagen de Ω es un conjunto definido de manera semejante a Ω .
- sea $\tilde{F} = T_\xi(F)$, entonces $\tilde{F} = \tilde{\Omega} \cap \Delta$, es decir, la imagen de F es un conjunto definido de manera semejante a F .

- $\tilde{A}e = 0$, es decir, \bar{e} está en \tilde{F} .
- si x está en $\overset{\circ}{\Delta}$, entonces $T_\xi(x)$ está en $\overset{\circ}{\Delta}$.
- si x está en $\overset{\circ}{F}$, entonces $T_\xi(x)$ está en $\overset{\circ}{\tilde{F}}$.
- si y está en $\overset{\circ}{\tilde{F}}$, entonces $T_\xi^{-1}(y)$ está en $\overset{\circ}{F}$.

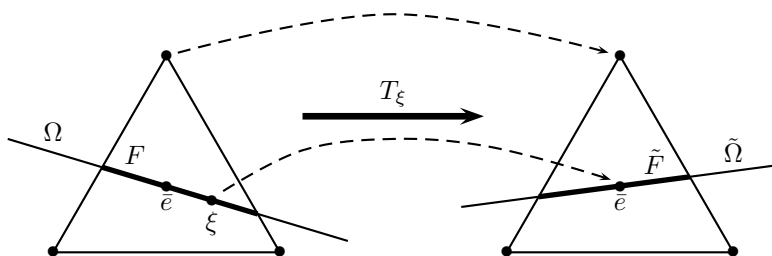


Figura 3. La función T_ξ en \mathbb{R}^3 .

Sea $\tilde{c} = D(\xi)c$, consideremos un problema análogo al problema PCK1, llamado PCK2

$$\begin{aligned}
 \min \tilde{z} &= \tilde{c}^T y \\
 \tilde{A}y &= 0 \\
 e^T y &= 1 \\
 y &\geq 0
 \end{aligned}
 \tag{PCK2}$$

- los dos problemas PCK1 y PCK2 son equivalentes en el siguiente sentido:
 x^* es solución óptima de PCK1 si y solamente si $T_\xi(x^*)$ es solución óptima de PCK2, o,
 y^* es solución óptima de PCK2 si y solamente si $T_\xi^{-1}(y^*)$ es solución óptima de PCK1.

Resolver el problema PCK1 tiene exactamente el mismo grado de dificultad que resolver el problema PCK2, o sea, hasta ahora no se gana nada. En el método

de Karmarkar se resuelve, en cada iteración, un problema más sencillo pero que ya no es exactamente equivalente a PCK1.

Para $n = 3$ es fácil ver que se puede inscribir un círculo C en el triángulo Δ , su centro es \bar{e} “centro” de Δ y su radio es $r = \sqrt{1/6}$. Este círculo corresponde simplemente a tomar la bola o esfera E con centro en \bar{e} y radio r e intersectarla con el triángulo Δ . Usando la norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, estas ideas se generalizan para otros valores de n así:

$$r = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}$$

$$E = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{e}\| \leq r \}$$

$$C = E \cap \Delta$$

Como C está incrito en Δ , entonces necesariamente toca los lados o “caras” de Δ . Si se construye un círculo un poco más pequeño, éste no toca las caras de Δ .

Sean:

$$0 < \alpha < 1,$$

$$E_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{e}\| \leq \alpha r \},$$

$$C_\alpha = E_\alpha \cap \Delta.$$

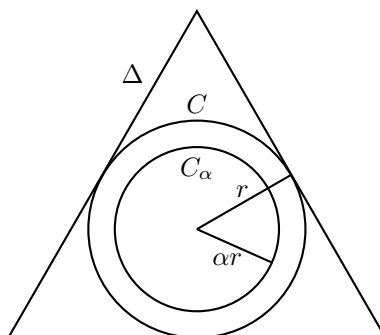


Figura 4. El conjunto Δ y los círculos C y C_α .

Consideremos ahora una simplificación del problema PCK2 cambiando el conjunto factible \tilde{F} por un subconjunto propio y llamemos a este problema simplificado PK3:

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= \tilde{c}^T y \\ \tilde{A}y &= 0 \\ y &\in C_\alpha \end{aligned} \tag{PK3}$$

Sea u^* solución óptima del problema PK3. Como el conjunto factible del problema PK3 es un subconjunto propio del conjunto factible del problema PCK2 y la función objetivo es la misma para los dos problemas, entonces el punto u^* (que también está en \tilde{F}) posiblemente no es tan bueno como y^* , o dicho de otra forma,

$$\tilde{c}^T y^* \leq \tilde{c}^T u^*$$

pero el problema PK3 es más fácil de resolver. Veamos a continuación algunos detalles. El problema PK3 se puede escribir

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= \tilde{c}^T y \\ \tilde{A}y &= 0 \\ e^T y &= 1 \\ \|y - \bar{e}\| &\leq \alpha r \end{aligned} \tag{PK3}$$

Si $B = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ e^T \end{bmatrix}$ matriz $(m+1) \times n$ y $g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ columna $(m+1) \times 1$,

entonces PK3 se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \min \tilde{z} &= \tilde{c}^T y \\ By &= g \\ \|y - \bar{e}\| &\leq \alpha r \end{aligned} \tag{PK3}$$

Como la función \tilde{z} es lineal, entonces el minimizador debe estar necesariamente en la frontera de la esfera E_α o sea que se debe tener necesariamente la igualdad.

$$\begin{aligned}
\min \tilde{z} &= \tilde{c}^T y \\
By &= g \\
\|y - \bar{e}\| &= \alpha r
\end{aligned}
\tag{PK3}$$

Consideremos ahora un problema supersencillo, PK4:

$$\begin{aligned}
\min \hat{z} &= \hat{c}^T y \\
\|y - \bar{e}\| &= \alpha r
\end{aligned}
\tag{PK4}$$

Para minimizar una función lineal en la frontera de una esfera basta con desplazarse a partir del centro \bar{e} en la dirección contraria a \hat{c} hasta llegar a la frontera, o, lo que es lo mismo, desplazarse una distancia αr en la dirección unitaria $-\frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|}$, o sea, si w^* es el minimizador de PK4, entonces

$$w^* = \bar{e} - \alpha r \frac{\hat{c}}{\|\hat{c}\|}$$

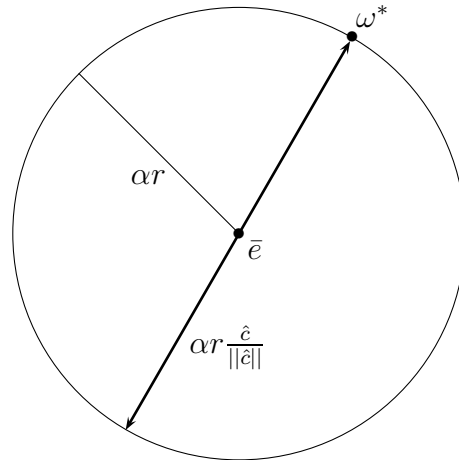


Figura 5. Solución del problema PK4.

El cálculo se vuelve mucho más complejo cuando se tiene en cuenta la restricción $By = g$. En este caso hay que proyectar \tilde{c} sobre el espacio nulo de la matriz B (el conjunto de vectores columna tales que $Bx = 0$):

$$p = (I - B^T(BB^T)^{-1}B)\tilde{c}$$

y este p se considera como el \hat{c} del problema PK4 en la fórmula del cálculo de w^*

$$u^* = \bar{e} - \alpha r \frac{p}{\|p\|}$$

El punto obtenido u^* es apenas una aproximación de y^* , entonces al regresar mediante T_ξ^{-1} al problema PCK1, se obtiene $T_\xi^{-1}(u^*) \in \overset{\circ}{F}$, aproximación de x^* .

En resumen, si se desea resolver PCK1:

- se toma ξ punto interior admisible de PCK1,
- mediante T_ξ se construye el problema PCK2,
- se construye un problema PK3 más sencillo y se obtiene su solución u^* aproximación de y^* (solución de PCK2),
- mediante T_ξ^{-1} se obtiene $T_\xi^{-1}(u^*)$, punto interior admisible de PCK1, aproximación de x^* (solución de PCK1).

Este proceso se repite varias veces hasta obtener una aproximación de la solución con la precisión deseada.

Conocidos el vector columna c , la matriz A , ε valor positivo muy pequeño utilizado para “medir” la precisión y $0 < \alpha < 1$, el algoritmo del método de Karmarkar se puede esquematizar así:

```

 $x \leftarrow \bar{e}$ 
mientras  $c^T x > \varepsilon$  hacer
   $D \leftarrow D(x)$ 
   $\tilde{A} \leftarrow AD$ 
   $\tilde{c} \leftarrow Dc$ 
   $B \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ e^T \end{bmatrix}$ 
   $p \leftarrow (I - B^T(BB^T)^{-1}B)\tilde{c}$ 
   $u^* \leftarrow \bar{e} - \alpha r \frac{p}{\|p\|}$ 
   $x \leftarrow \frac{Du^*}{e^T D u^*}$ 
fin-mientras

```

En este algoritmo el símbolo \leftarrow indica lo siguiente: asignar al término izquierdo el término derecho. El vector columna x siempre “contiene”, la mejor aproximación (de la solución x^*) obtenida, es decir, la última aproximación calculada. La parte más costosa en tiempo es la construcción de p , es en esta parte donde

la adecuada o inadecuada implementación, la relación entre m y n , la densidad de A , la forma de A , la clase de coeficientes a_{ij} inciden mucho en el tiempo total de la solución del problema. El proceso iterativo se acaba cuando $c^T x$ es casi cero. El algoritmo está descrito con el objetivo de facilitar su presentación, pero en la práctica algunas matrices o vectores no se construyen explícitamente sino que simplemente se calculan los resultados que producen.

En el algoritmo de Karmarkar, el punto x nunca está en las “caras” o lados de F , siempre está en $\overset{\circ}{F}$, interior relativo de F , por esta razón se dice que el método de Karmarkar es un método de punto interior. Teóricamente el método de Karmarkar nunca encuentra la solución exacta (que está en la “frontera”), pero se acerca mucho a ella (tanto como se desee).

Actualmente [5] se acepta que los métodos llamados primal-dual son los métodos de punto interior más eficientes para OL, mejores aún que el método de Karmarkar, pero la mayoría de los métodos actuales de punto interior fueron deducidos después del artículo de Karmarkar, usando algunas o muchas de sus ideas.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] DANTZIG G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [2] KARMARKAR N., *A new polynomial-time algorithm for linear programming*, *Combinatorica*, 4, 1984, pp. 373-395.
- [3] KLEE V., MINTY G. J., *How good is the simplex algorithm*, en SHISHA O., *Inequalities III*, Academic Press, New York, 1972.
- [4] MORA H., *Método de Karmarkar*, 8 Coloquio Distrital de Matemáticas y Estad., Universidad Nacional, Universidad Pedagógica, Universidad Distrital, Bogotá, 1991.
- [5] WRIGHT M. H., *Interior methods for constrained optimization*, en ISERLES A., ed., *Acta Numerica 1992*, Cambridge University Press, 1992.